様式 C-19

# 科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　５月２９日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007 ～ 2008
課題番号：19540210
研究課題名（和文）　超臨界指数をもつ非線形放物型方程式の解の特異性と挙動に関する研究

研究課題名（英文）　On the singularity and the behaviors of solutions for parabolic equations with supercritical nonlinearity

研究代表者
溝口　紀子(MIZOGUCHI NORIKO)
東京学芸大学・教育学部・准教授
研究者番号：00251570

研究成果の概要：優臨界指数をもつ半線形放物型方程式の解の有限時間での爆発は、指数が劣臨界の場合と大きく異なる。特徴的なものとして不完全爆発、タイプ II の爆発、タイプ I の爆発の自己相似解の構造が挙げられる。本研究では，多孔質媒体における方程式および走化性方程式系における複数回爆発する解の構成、任意のタイプ II 爆発解の詳細な rate の決定、Lepin の指数より大きい冪をもつときのタイプ I の自己相似解の非存在定理の証明を行った。

交付額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合　計 |
|---|---|---|---|
| 2007 年度 | 2,200,000 | 660,000 | 2,860,000 |
| 2008 年度 | 1,300,000 | 390,000 | 1,690,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総　計 | 3,500,000 | 1,050,000 | 4,550,000 |

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：非線形解析学、爆発、超臨界指数

１．研究開始当初の背景

半線形拡散方程式 $u_t = \Delta u + |u|^{p-1} u$ の初期値問題の解は初期値，空間次元，非線形項の冪 $p$ の値によって有限時間で爆発する場合と時間大域的に存在する場合がある．ここで，解 $u$ の $L^\infty$-ノルムがある有限な時刻 $T$ で無限大に発散するとき $u$ は時刻 $T$ で爆発すると言い，$|u|$ が時刻 $T$ で無限大になっているような点を爆発点と呼ぶ．時間大域解とは古典解としてすべての時刻で存在する解のことである．この方程式は固体燃料の燃焼を記述しており，爆発は発火とみなすことが出来る．有限時間での爆発と時間大域的存在のどちらが起こるかを決定するという基本的な問題については，すでに国内外の多くの研究者の努力によってほとんど解決されている．すると次の研究対象は，各々の場合に解がどのような振る舞いをするかを調べることである． $p$ が Sobolev の埋め込み定理の意味での臨界指数 $p_S$ より小さい(subcritical)場合は，有限時間で爆発する解の爆発点の近傍での挙動についても時間大域解の時刻無限大での挙動についても研究が進み非常に特別な状況を除けばすでに解明されている．これらの結果は，subcritical の場合の解の挙動は多くの研究者にとって想定内であることを物語っている．ところが， $p > p_S$ (supercritical）に

対しては，長い間 二、三の結果を除けば手つかずといってよい状態が続いていたが数年前から興味深い事実がいくつか提示されてきた．これまでに知られている数少ない結果からも容易に推測できるが，supercritical の場合の状況は subciritical の場合よりはるかに複雑な様相を呈している．

そのひとつとして不完全爆発と呼ばれる非常に面白い現象がある．これは古典解の意味では有限時刻で爆発しているが， 弱解の意味では延長できるような爆発を意味する．不完全爆発する解の存在は

[1] V. A. Galaktionov and J. L. Vazquez, Continuation of blowup solutions of nonlinear heat equations in several dimensions, Comm. Pure Appl. Math. 50 (1997), 1-67

[2] N. Mizoguchi, On the behavior of solutions for a semilinear parabolic equation with supercritical nonlinearity, Math. Z. 239 (2002), 215-229

によって既知であるが，そのような解が爆発後どのような振る舞いをするかについてはきわめて特別な場合を除けば何も分かっていなかった．これまでに知られていたのはpeaking solutionと呼ばれる爆発後すぐに古典解となりそのまま時間大域的に存在し続ける解である．実際のモデルではいったんは発火するがそれは不完全燃焼ですぐに火が消えてしまいそのまま二度と発火は起こらないことを意味する．peaking solutionについても知られていたものは逆向きの自己相似解として爆発し爆発時刻で前向きの自己相似解に接続され時刻無限大で0に収束するような特殊な解のみであったが，

[3] N. Mizoguchi, Various behaviors of solutions for a semilinear heat equation after blowup, J. Functional Analysis 220 (2005), 214-227

で，時刻無限大で様々な挙動をするpeaking solutionが得られた．また，解がある有限時刻で不完全爆発した後すぐに古典解に戻り再び爆発するという現象，即ち，不完全燃焼がおこり火はすぐに消えてしまうがしばらくして再度発火するという現象が起こることが

[4] N. Mizoguchi, Multiple blowup of solutions for a semilinear heat equation, Math. Ann 331 (2005), 461-473.

[5] N. Mizoguchi, Multiple blowup of solutions for a semilinear heat equation II, J. Differential Equations 231 (2006), 182-194

で示された．[4]が発表されるまでは，このような種類の爆発の可能性については否定的な予想も肯定的な予想もあったが，この２つの論文で肯定的に解決された．

$p$ がsuperciritcalの場合の爆発に関するもうひとつの興味深い現象は，対応する常微分方程式の解の爆発のオーダーより速い爆発が起こり得ることである．実際，そのような解が

[6] M. A. Herrero and J. J. L. Velazquez, Explosion de solutions des ¥'{e}quations paraboliques semilin¥'{e}aires supercritiques, C. R. Acad. Sci. Paris 319 (1994), 141-145

で構成されている．このような爆発は type II と呼ばれ，$p$ が superciritcal の場合に固有の現象である．

## ２．研究の目的

[4]と[5]で得られた複数回爆発する解の特徴は，どの爆発時刻でも同じ場所で爆発が起こっていることと異なる爆発時刻の差が非常に大きいことである．では，異なる爆発時刻で異なる場所で爆発する解や，任意に与えられた複数の時刻で爆発する解は存在するのだろうか？ さらに，[4]と[5]で得られた解は球対称であるが，球対称性をもたない解で複数回の爆発が起こるようなものは存在するのかという自然な疑問が生じる．本研究ではこれらについて解明する．さらに，多孔質媒体における方程式をはじめとしてより一般的な非線形放物型方程式への拡張についても考える．本研究の研究代表者によって[4]と[5]で始められた複数回爆発する解の詳細なメカニズムを解き明かすことが本研究の目的のひとつである．

Type II の爆発の定義は爆発の rate が $u_t = u^p$ の解の爆発のオーダーより速いというだけでそれより詳しい情報は全く与えていない．例えば，いくらでも速い rate で爆発する解が存在するのだろうか？ それとも，爆発の rate には何らかの上限があるのだろうか？ 本研究では，この問いを始めとしてほとんど何も分かっていない type II の爆発の性質を調べる．他の方程式やシステムでも type II の爆発をする解の存在は知られているが，個々の解ではなく一般的な挙動の研究はほとんど進んでいないようである．$u_t = \Delta u + |u|^{p-1} u$ に関する研究を最初のステップとして他の方程式やシステムについても考える．

## ３．研究の方法

東北大学に出張して連携研究者の柳田英二氏と非線形放物型方程式の解の挙動に関する議論を行なった．

Guiros 氏と Vazquez 氏との共同研究は３年前にマドリードに招待されたときに始まっ

たが，この２年間にそれを完成させた．

Fila 氏との共同研究によって，不完全爆発に関する新しい結果を得た．

仙葉隆氏と，走化性方程式系について共同研究を行った．

国内外の研究集会に出席して研究成果を発表した．それによって多くの研究者と議論を交わし，これからの研究の進め方についての示唆を得た．

４．研究成果

半線形拡散方程式 $u_t = \Delta u + |u|^{p-1} u$ の初期値問題のtype IIの爆発をする解の爆発のrateを決定した．放物型方程式の２つの解の間の交点数が時間に関して非増加であることと、微分係数も０になっていれば交点数はその時刻で減少するという性質は、放物型方程式の解の挙動の研究において重要な役割を果たしてきた．しかし、typeIIの爆発のrateを調べるためにはそれでは不十分である．そこで３つ目の解をうまく構成し３つの解の間の交点数だけでなくそれらの動きを注意深く追うことによってtypeIIの爆発のrateをｐがLepinの指数より大きい場合に決定した．次に，これらの３つの解に組みひも群の理論を適用することによって非線形項の冪ｐに関する仮定をJoseph-Lundgrenの指数より大きいという条件に改良した．

さらに，最初の論文では非常に複雑な解析的な評価を必要としたが，組みひも群の理論を適用することによりその複雑さを解消し証明を簡単にすることができた．組みひも群を偏微分方程式に応用することはGhrist等により始められたが，ここで用いた方法は彼らの視点とは全く異なり，Matanoによって定義されたparabolic reductionという概念を用いた．また、個々の方程式の形に依存しないので多くの方程式への幅広い応用が期待される．実際，爆発後の弱解としての解の延長の一意性の研究にも応用した．

type Iの爆発をする解が，時間が爆発時刻に近づくとき爆発点の近傍でどのような振る舞いをするかについて調べた．爆発点の近傍での解の挙動を調べることは，Giga-Kohnで導入された逆向きの自己相似的な変数変換によって書き換えられた別の方程式（GKと書く）の時間大域解の時刻無限大での挙動の研究に帰着することができる．方程式GKの時間大域解はその定常解に収束することが分かっている．従って，type Iの爆発をする解の爆発点の近くでの挙動を調べるためには方程式GKの定常解の構造を知ることが不可欠である．非線形項の冪ｐがLepinの指数より大きい場合に方程式GKの自明でない定常解が存在するかどうかという問題は１５年以上未解決のままであったが、本年度の研究により存在しないことを完全に証明した．

走化性方程式系の初期値問題の解でtype IIの爆発をするものを構成した．さらに，これをもとにして複数回爆発するような解が存在することを証明した．

これらの結果を証明するためには研究代表者による半線形熱方程式の方法を応用したが，方程式の形がより複雑なので工夫を必要とした．

多孔質媒体における拡散方程式に対して複数回爆発するような解を構成した．

半線形熱方程式で用いた方法では方程式の拡散項が線形であることが本質的であったので多孔質媒体における拡散方程式には応用できない．したがって，多孔質媒体における拡散方程式の特徴を活用し半線形熱方程式の場合と異なる方法によって証明した．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　13　件）


① N. Mizoguchi, On the uniqueness of $ L^1 $-continuation after blowup, J. Functional Analysis 254 (2008), 2893-2910

② N. Mizoguchi, Blowup rate of type II and the braid group theory, Trans. Amer. Math. Soc. (to appear)

③ M. Fila, M. Winkler and E. Yanagida, Slow convergence to zero for a parabolic equation with supercritical nonlinearity、Math. Ann. 340 (2008), 477-496

④ M. Fila, M. Winkler and E. Yanagida, Convergence to self-similar solutions for a semilinear parabolic equation, Discrete Contin. Dyn. Syst. 21 (2008), 703−716

⑤ M. Fila, J. R. King, M. Winkler and E. Yanagida, Linear behaviour of solutions of a superlinear heat equation, J. Math. Anal. Appl. 340 (2008), 401-409

⑥ M. Hoshino and E. Yanagida, Sharp estimates of the convergence rate for a semilinear parabolic equation with supercritical nonlinearity, Nonlinear Anal. 69 (2008), 3136-3152

⑦ N. Mizoguchi and J. L. Vazquez, Multiple blowup for nonlinear heat equations at different places and different times, Indiana Univ. Math. J. 56 (2007), 2859-2886

⑧ N. Mizoguchi, Rate of type II blowup for a semilinear heat equation, Math. Ann. 339 (2007), 839-877
⑨ M. Fila and N. Mizoguchi, Multiple continuation beyond blow-up, Differential Integral Equations 20 (2007), 671--680
⑩ N. Mizoguchi and T. Senba, Type-II blowup of solutions to an elliptic-parabolic system, Adv. Math. Sci. Appl. 17 (2007), 505-545
⑪ M. Fila, J. R. King, M. Winkler and E. Yanagida, Grow-up of solutions of a semilinear parabolic equation with a critical exponent, Adv. Diff. Eqs. 12 (2007), 1-26.
⑫ E. Yanagida, Irregular behavior of solutions for Fisher's equation, J. Dyn. Diff. Eqs. 19 (2007), 895-914
⑬ M. Iida, K. Nakashima and E. Yanagida, On certain one-dimensional elliptic systems under different growth conditions at respective infinities, Advanced Studies in Pure Mathematics 47 (2007), 567-574

〔学会発表〕(計 19 件)
① N. Mizoguchi, On Backward Self-similar Blowup Solutions to a Supercritical Semilinear Heat Equation, 日本数学会 2009 年度年会 函数方程式論分科会, 2008.3.28, 東京大学
② N. Mizoguchi, On backward self-similar blowup solutions to a supercritical semilinear heat equation, Seminar in Paris Nord, 2009.2.6, Paris Nord
③ N. Mizoguchi, Nonexistence of backward self-similar blowup solutions to a supercritical semilinear heat equation, 日本数学会秋季総合分科会 函数方程式論分科会, 2008.9.26, 東京工業大学
④ N. Mizoguchi, Nonexistence of backward self-similar blowup solution to a supercritical semilinear heat equation, Third Euro-Japanese Workshop on Blow up, 2008.9.8, 東北大学
⑤ N. Mizoguchi, Nonexistence of backward selfsimilar blowup solution to a supercritical semilinear heat equation, 『応用解析』研究会, 2008.5.24, 早稲田大学
⑥ N. Mizoguchi, On the uniqueness of $ L^1 $-continuation after blowup, 日本数学会 2008 年度年会 函数方程式論分科会, 2008.3.25, 近畿大学
⑦ N. Mizoguchi, Blowup rate of type II and the braid group theory, PDE seminar, 2008.2.13, University of Minnesota
⑧ N. Mizoguchi, Blowup rate of type II and the braid group theory, PDE Work Shop, 2008.1.16, National Taiwan University
⑨ N. Mizoguchi, Blowup rate of type II and the braid group theory, 微分方程式の総合的研究, 2007.12.14-15, 東京大学
⑩ N. Mizoguchi, 組みひも群の非線形拡散方程式の解の爆発への応用, 京都解析コロキウム, 2007.11.17, 京都大学
⑪ N. Mizoguchi, Blowup rate of type II and the braid group theory, 日本数学会秋季総合分科会 函数方程式論分科会, 2007.9.23, 東北大学
⑫ N. Mizoguchi, Blowup rate of type II and the braid group theory, 東北大学談話会, 2007.6.11, 東北大学
⑬ E. Yanagida, Principal eigenvalue for an elliptic problem with indefinite weight and its application to population dynamic, 21 世紀ＣＯＥ「物質階層融合科学の構築」第 6 回国際シンポジウム, 2007.12.15, 東北大学
⑭ E. Yanagida, Some properties of decaying solutions of a semilinear parabolic equation, Recent Advances on Nonlinear Parabolic and Elliptic Differential Equations, 2007.12.4, 龍谷大学
⑮ E. Yanagida, Decaying solutions for a semilinear parabolic equation, First Chile-Japan Workshop on Nonlinear PDE, 2007.10.23, University of Chile
⑯ E. Yanagida, Solutions with moving singularities for a semilinear parabolic equation, BIRS Workshop, 2007.10.11, Banff International Research Station
⑰ E. Yanagida, 歪勾配系における安定性解析 I, II, 非線形数理秋の学校「パターン形成の数理とその周辺」, 2007.9.27, 明治大学
⑱ E. Yanagida, Stability analysis of stationary interfaces with triple junctions, Joint NCTS (South) Seminar, 2007.8.31, National Sun Yat-sen University
⑲ E. Yanagida, Convergence to self-similar solutions for a semilinear parabolic equation, mini-symposium (Qualitative theory of elliptic and parabolic PDEs), 2007.8.7, Vienna University of Technology

６．研究組織

(1)研究代表者

溝口　紀子(NIZOGUCHI NORIKO)
東京学芸大学・教育学部・准教授
研究者番号：００２５１５７０

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

柳田　英二(YANAGIDA EIJI)
東北大学大学院・理学研究科・教授
研究者番号：８０１７４５４８