

機関番号：13801  
 研究種目：基盤研究(C)  
 研究期間：2007～2010  
 課題番号：19540212  
 研究課題名(和文) ミニマイジング・ムーブメントを中心に変分問題、微分方程式等における諸問題の研究  
 研究課題名(英文) Study of problems in calculus of variations, differential equations, and other areas involving minimizing movements  
 研究代表者  
 菊地 光嗣 (Kikuchi Koji)  
 静岡大学・工学部・教授  
 研究者番号：50195202

研究成果の概要(和文)：本件の研究により障害物のある弦の振動方程式についてミニマイジング・ムーブメント法により構成された近似解の極限が実際に方程式をみたすことがわかった。このほか、ノンパラメトリックな膜の振動方程式に関する研究、準線形双曲型方程式系に関する研究、有界変動関数に対する勾配ヤング測度に関する研究、一次増大度の強粘性項を持つ発展方程式に関する研究についても成果を得ることができた。

研究成果の概要(英文)：Through this study we obtain that the limit of approximate solutions to the equation of vibrating string with an obstacle is really a solution to this equation. Besides we obtain several facts in the study of the equation of motion of a vibrating nonparametric membrane, in the study of a system of quasilinear hyperbolic equations, in the study of gradient Young measures for BV functions, in the study of the equation of motion of a vibrating membrane with a strong viscosity term.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究代表者の専門分野：偏微分方程式

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：ミニマイジング・ムーブメント、変分問題、非線形偏微分方程式、発展方程式、幾何学的測度論

#### 1. 研究開始当初の背景

ミニマイジング・ムーブメントは、それまで偏微分方程式や平均曲率流の研究において用いられていた理論をベースに De Giorgi が 1993 年に提唱した比較的新しい数学の概念である。ミニマイジング・ムーブメントの理論は微分方程式の近似解法が源流にあり、例えば凸汎関数に対応する勾配流の方程式に対してはミニマイジング・ムーブメントであることと弱解であることが同値になる

ことがわかる。De Giorgi によればミニマイジング・ムーブメントの理論は変分問題、微分方程式、幾何学的測度論の様々な問題を統一的に扱うものであり、解析学、幾何学、数理論理学、数値解析の様々な問題の接点である。実際、平均曲率流の研究に代表されるようにこれらの諸分野が交錯しているところでミニマイジング・ムーブメントは重要な役割を果たしている。このことを踏まえ平成16年度から科学研究費の補助(基盤研究(C))

「ミニマイジング・ムーブメント理論の視点からの発展方程式の研究」課題番号16540186)を受けてミニマイジング・ムーブメントの発展方程式への応用に関する研究を推進していくつかの新しい所見を得た。しかしながらその中には当初予測よりもミニマイジング・ムーブメントの構造がかなり複雑であることを示唆するものが含まれていた。そのためこの課題については残り1年を残して本件の課題に移行した。本件の研究課題はミニマイジング・ムーブメントを発展方程式等に応用するという視点から、ミニマイジング・ムーブメント自体を主眼においたものである。

## 2. 研究の目的

本件の研究の目的はミニマイジング・ムーブメントの理論について主として以下のことを明らかにすることであった：

- (1) 変分問題に関係するミニマイジング・ムーブメントの研究
- (2) 微分方程式の研究におけるミニマイジング・ムーブメントの果たす役割の解明
- (3) ミニマイジング・ムーブメントによる曲面の振動の研究
- (4) ミニマイジング・ムーブメントの研究への幾何学的測度論の応用

おそらくこれらの諸問題は一つ一つ独立しているのではなく何らかの形で互いに関係していると思われ、ミニマイジング・ムーブメントという視点で捉える事により、それらの関係を解明していくことが本研究の一番の目的であった。

## 3. 研究の方法

一般論として数学の研究には情報収集活動が重要である。本件の補助金もほとんどを情報収集活動に費やした。

### (1) 各分担者の役割分担

研究目的に応じて各分担者の役割分担を以下のようにした：

研究目的の(1)・・・足達，菊地

研究目的の(2)・・・清水，菊地

研究目的の(3)・・・星賀，菊地

研究目的の(4)・・・中島，菊地

各研究目的に応じて分担者にも情報収集活動をお願いした。

### (2) 書籍購入

情報収集活動の基本は文献の収集である。本件でも初年度に解析学関係を中心に幾何

学関係や数値解析関係を含む図書を10数冊購入した。第2年目以降も必要に応じて書籍を購入した。

### (3) 研究連絡

研究の最先端の状況をじっくりと学ぶには文献にあたるのが一番よい。しかしながら印刷されて公表される時期は実際には情報としては少し古く、したがって最前線の情報を得るためには関連する研究者に会って直接研究連絡、討論を行うことで情報を収集する必要がある。研究代表者菊地及び各分担者は各自の分担に応じて他大学を訪問し関係する研究者と必要な研究連絡を行った。また、数名の研究者には静岡大学に来訪してもらい必要な研究連絡を行った。

## 4. 研究成果

### (1) 研究成果の概要

本件の研究で得られた研究成果のうち大きなものは、障害物のある振動方程式に関するもの、ノンパラメトリックな膜の振動方程式に関するもの、準線形双曲型方程式系に関するもの、有界変動関数に対する勾配ヤング測度に関するもの、一次増大度の強粘性項を持つ発展方程式に関するもの、の5件である。これらのうち①についてはすでに雑誌論文として公表されている。また、②については論文にまとめ投稿中である。その他の研究については一部は学会などで口頭発表した。

各成果についてその概要を述べる。

#### ① 障害物のある振動方程式に関する研究

障害物のある弦の振動方程式についてミニマイジング・ムーブメント法により構成された近似解の極限は実際に方程式をみたすことがわかった。この研究は主として神戸大学名誉教授丸尾健二氏、金沢大学教授小俣正朗氏らとの討論を通して推進した。この研究は研究計画の欄で述べた研究目的の(1)、(2)に関する成果である。なお、ここでは弦を扱っているが曲面の振動方程式への発展が期待できるので研究目的の(3)とも関連がある。

#### ② ノンパラメトリックな膜の振動方程式に関する研究

本件の研究代表者菊地はノンパラメトリックな曲面の振動方程式の近似解をミニマイジング・ムーブメントの方法で求めその極限がエネルギー保存則を満たせば弱解になるという定理を過去に得ていた。この定理は幾何学的測度論の一つであるヴァリフォルド理論を用いて証明されたのであるが、しかしながら、ヴァリフォルド理論は偏微分方程式の研究においては標準的な理論ではなく、そのため、多くの偏微分方程式の研究者にとっては理解が困難なものであった。これを、

エネルギー汎関数の凸性を利用してより標準的な方法で証明することに成功した。この研究に関しては東京工業大学名誉教授井上淳氏、東北大学名誉教授増田久弥氏らと討論を行った。この研究は研究目的の(2)、(3)に関する成果である。また研究目的の(1)とも関連がある。

### ③ 準線形双曲型方程式系に関する研究

連立準線形双曲型方程式系に対してエネルギー保存則の仮定の下での弱解の構成をミニマイジング・ムーブメント法を用いて行った。連立系になるとエネルギー汎関数が凸とは限らず一般には準凸となる場所に困難点がある。多くの技術的な仮定を要求すればこれらの事実が成立するという結果は過去に得られていたが、今回の研究では、これらの技術的仮定をほぼ解消させることに成功した。ただ、従来から解の定義がやや弱い形でしか与えられておらず、残念ながら現時点では解の定義はこの弱い形のままである。この研究に関しては広島大学教授坂口茂氏、熊本大学教授三沢正史氏らと討論を行った。この研究は研究目的の(2)、(3)に関する成果である。また研究目的の(1)、(4)とも関連がある。

### ④ 有界変動関数に対する勾配ヤング測度に関する研究

準線形双曲型方程式系のミニマイジング・ムーブメントを用いた研究には勾配ヤング測度が主要な道具となる。有界変動関数に対する勾配ヤング測度の理論を開発し、ソボレフ関数に対する勾配ヤング測度に対して知られている性質と類似の事実が有界変動関数に対する均質な勾配ヤング測度に対して成立することがわかった。この研究は研究目的の(4)に関する成果である。また研究目的の(1)、(3)とも関連がある。

### ⑤ 一次増大度の強粘性項を持つ発展方程式に関する研究

ある特殊な形の一次増大度の粘性項をノンパラメトリックな曲面の振動方程式に付加した時に、初期条件が適当なクラスに属していれば、その方程式は有界変動関数の空間で解けることを示した。このとき解は方程式の形を少し変形した上でミニマイジング・ムーブメントの方法により構成した。この研究の一部は神戸大学教授中桐信一氏、同准教授白川健氏らとの討論により推進した。この研究は研究目的の(2)に関する成果である。また研究目的の(1)、(3)とも関連がある。

### (2) 本件の研究の総括

上に述べた研究成果では微分方程式の研究へのミニマイジング・ムーブメントの応用

(研究目的の(2))に関するものが多い。背景のところでも述べたようにミニマイジング・ムーブメントは微分方程式の近似解法が源流にあるので自然なことなのであるが、ミニマイジング・ムーブメントの構造そのものがもっと解明できればよかった。この点については今後の課題であろう。次いで、曲面の振動(研究目的の(3))に関連する結果も多い。この問題は偏微分方程式としては双曲型の問題であるが、双曲型のミニマイジング・ムーブメントは世界的に見てもあまり研究されていないので、これらの成果は本件の研究の大きな特徴と言えるであろう。また、研究成果の③は4つのすべての研究目的と関係しており、4つの研究目的の関連をミニマイジング・ムーブメントという視点で捉えるという本件の大きな目的に沿った成果である。ただ、残念ながら解の定義がやや弱い形でしか与えられておらず、これも今後の課題である。

### (3) 今後の展望

上述のようにミニマイジング・ムーブメントの構造そのものの解明が今後の課題となっている。ミニマイジング・ムーブメントの研究は世界的に見ても決して活発であるとは言えないが、関心を持つ研究者は国内外に多数おり、ミニマイジング・ムーブメントに関する未知の構造の解明は世界中の多くの研究者の関心を引くであろう。勾配流のような放物型の問題のみならず振動現象を扱う双曲型に関連するミニマイジング・ムーブメントの構造についてももっと研究が進むことを期待する。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

① Koji Kikuchi, Constructing a solution in time semidiscretization method to an equation of vibrating string with an obstacle, *Nonlinear Analysis*, 査読有, 71 (2009), e1227-e1232.

<http://ir.lib.shizuoka.ac.jp/handle/10297/5035>

② Koji Kikuchi, Linear approximation for equations of motion of vibrating membrane with one parameter, *J. Math. Soc. Japan*, 査読有, 60 (2008), 127-169.

[学会発表] (計 8 件)

① 菊地光嗣, 一次増大度の粘性項を持つ膜の振動方程式について, 夏の偏微分方程式セミナー2010, 2010年8月25日, 神戸大学

② Koji Kikuchi, An analysis of a system of quasilinear hyperbolic equations having quasiconvex and linear growth energy functional, 熊本における偏微分方程式研究集会, 2008年10月25日, 熊本大学大学院自然科学研究科

③ Koji Kikuchi, An analysis of a system of quasilinear hyperbolic equations having quasiconvex and linear growth energy functional, 第9回広島応用解析セミナー, 2008年9月4日, 広島大学工学部

④ Koji Kikuchi, Constructing a solution in time semidiscretization method to an equation of vibrating string with an obstacle, WCNA2008, 2008年7月8日, 米国フロリダ州

⑤ Koji Kikuchi, Constructing a solution in minimizing movement method to an equation of vibrating string with an obstacle, Kumamoto Workshop on Nonlinear Evolution Equations 2007, 2007年8月10日, 休暇村南阿蘇

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

菊地 光嗣 (KIKUCHI KOJI)  
静岡大学・工学部・教授  
研究者番号: 50195202

### (2) 研究分担者

清水 扇丈 (SHIMIZU SENJO)  
静岡大学・理学部・教授  
研究者番号: 50273165

星賀 彰 (HOSHIGA AKIRA)  
静岡大学・工学部・准教授  
研究者番号: 50261400

足達 慎二 (ADACHI SHINJI)  
静岡大学・工学部・准教授  
研究者番号: 40339685

中島 徹 (NAKAJIMA TORU)  
静岡大学・工学部・准教授  
研究者番号: 50362182