

平成 22 年 3 月 15 日現在

研究種目：基盤研究 (C)
研究期間：2007～2009
課題番号：19540217
研究課題名 (和文) 幾何学的変分問題の解の安定性と大域的性質に関する研究
研究課題名 (英文) Research on stability and global properties of solutions of geometric variational problems
研究代表者 小磯 深幸 (KOISO MIYUKI) 奈良女子大学・理学部・教授
研究者番号：10178189

研究成果の概要 (和文)：曲面上の各点における法線方向に依存するエネルギーの曲面上での総和 (積分) を非等方的表面エネルギーと呼ぶ。本研究では、同じ体積を囲む曲面の中での非等方的表面エネルギーの臨界点 (以下では CAMC 曲面と呼ぶ) についての研究を行った。まず、平行な二平面上に自由境界をもつ CAMC 曲面の幾何学的性質とエネルギー極小性について多くの研究成果を得た。また、3 次元ユークリッド空間内の種数 0 の CAMC 閉曲面は相似と平行移動を除き一意であることを証明した。

研究成果の概要 (英文)：We studied equilibrium surfaces for anisotropic surface energy with volume constraint (CAMC surfaces). We obtained many important results about geometry and stability for CAMC surfaces with free boundary on two parallel planes. Moreover, we proved a uniqueness theorem for closed CAMC surfaces.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2008 年度	900,000	270,000	1,170,000
2009 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：変分法、変分問題、capillary surface、Delaunay 曲面、非等方的表面エネルギー、非等方的平均曲率一定曲面、平均曲率一定曲面、Wulff 図形

## 1. 研究開始当初の背景

幾何学における最も重要な研究課題の一つとして、幾何学的変分問題の解についての研究がある。その中で、曲面に関する最も基本的な研究対象は、極小曲面と平均曲率一定

曲面(以下、CMC 曲面と記す)である。前者は面積の臨界点、後者は体積を変えない変分に対する面積の臨界点であり、18 世紀後半より現在に至るまで活発に研究されてきた。ところが、たとえば結晶のように異方性を持つ物

質の形状については、エネルギーとして面積汎関数を考えるだけでは十分でなく、より一般のエネルギーの臨界点として捉える必要がある。そこで、曲面上の各点における法線方向に依存するエネルギーの曲面上での総和(積分)を非等方的表面エネルギーと呼ぶ。物理的にも自然な変分問題は、「体積一定」なる付加的条件のもとでの非等方的表面エネルギーの極小問題である。臨界点は、ある種の重み付き曲率が至る所一定であるような曲面であり、非等方的平均曲率一定曲面(以下ではCAMC曲面と記す)と呼ばれる。CAMC曲面は、極小曲面やCMC曲面の一般化となっている。CAMC曲面は、体積を保つ変分に対する非等方的表面エネルギーの第2変分が非負であるとき安定であるといわれる。また、同じ体積を囲む閉曲面の中でのエネルギー最小解はWulff図形と呼ばれる凸曲面となることが知られており、特にエネルギー汎関数が面積の場合はWulff図形は球面である。

CAMC曲面についての研究としては、従来、幾何学的測度論を用いたエネルギー最小解の存在と一意性に関する研究、解析的な手法によるCMC曲面や極小曲面の一般化としての研究等があった。一方、非等方的曲率流方程式の研究が儀我美一氏他、国内外の多くの研究者によって活発に行われている。曲面の非等方性は形態形成に重要な役割を果たすので、この分野は学際的に取り上げられている。とはいえ、この分野においては、1次元低い平面曲線についての研究は比較的進んでいるが、曲面の場合の研究はまだ始まって間もないと見ることができる。(安定な)CAMC曲面は、非等方的曲率流方程式の解の極限を与える候補ともなり、その性質を研究することは、この意味でも重要である。さて、CAMC曲面の幾何学的な研究もまた比較的未開拓の分野であったが、近年、とりわけ小磯深幸-Bennett Palmerにより、新たな発展をみた。小磯-Palmerは、Gauss写像の除外集合についての研究成果、自由境界問題の安定解の幾何学的特徴付け、存在、一意性についての研究成果等、CMC曲面の場合ですら知られていなかったいくつかの重要な結果を得た。

このような背景のもと、さらにこの分野の研究を進展させ、より一般の変分問題に応用可能な一般的・普遍的な理論の構築へと発展させると共に、一般的・普遍的な観点から問題の本質を抽出することにより、既知の方法や結果の単なる一般化ではなく、CMC曲面のような基本的な研究対象についてもまだ知られていない真に新しい結果が得られると期待された。また、得られた結果の、数学のみでなく、物理学や工学その他の分野への応用の可能性も期待された。

## 2. 研究の目的

- (1) 平行な二平面上に自由境界を持つ埋め込まれた曲面について、「体積一定」のもとでの「非等方的表面エネルギー+自由境界での濡れエネルギー」の臨界点について、未解決である濡れエネルギーが負である場合について研究し、安定解の幾何学的特徴付け、存在、一意性を解明する。
- (2) CMC曲面に対するDelaunayの定理をCAMC回転面、CAMC回転超曲面に対して一般化し、それを用いることにより、回転対称性をもつ凸閉超曲面への調和写像の例を構成する。
- (3) 境界成分の個数が2以上で、それぞれが単純である場合について、C(A)MC曲面の存在と一意性を明らかにする。
- (4) 上記の研究をとおして、より一般の変分問題に応用可能な一般的・普遍的な理論や方法を構築することを目指す。

## 3. 研究の方法

研究分担者(連携協力者)や研究協力者とは、電子メールや会合の機会を通して議論を行った。

研究に用いた手法は、微分幾何学的方法、位相幾何学的方法、微分方程式の解の存在と一意性、楕円型偏微分方程式の解に対する最大値原理(あるいは比較原理)、自己共役楕円型微分作用素に対する固有値問題(ディリクレ境界条件、ノイマン境界条件、混合境界条件)、関数解析、バナッハ空間上の汎関数の一助変数族の成す方程式の解に対する分岐理論、等周問題における対称化法、その他多岐にわたる。また、研究代表者・小磯によるCMC曲面やその一般化に対する摂動と安定性の判定法、小磯-PalmerによるCAMC回転面の表現公式、平行な二平面上に自由境界をもつ曲面に対する「非等方的表面エネルギー+支持平面での濡れエネルギー」の臨界点の安定性の判定、安定解の存在と一意性についての結果も有効に用いた。さらに、結果の予想のために計算機による数値計算を用いた課題もある。

## 4. 研究成果

- (1) 平行な二平面上に自由境界をもつ曲面について、「体積一定」のもとでの「非等方的表面エネルギー+支持平面での濡れエネルギー+曲面の境界のline tension」の臨界点について研究し、次の結果を始めとする多く研究成果を得た。

- ① 非等方的表面エネルギー密度が回転対称であり、line tensionが非負の場合には、最大値原理の応用により、自己交差をもたない臨界点は回転対称となることを証明した。

② 非等方的表面エネルギー密度が回転対称とは限らないより一般の場合について、line tension が正の場合にはシュワルツ対称化が適用できることを証明し、このことを用いて、臨界点の安定性を判定する方法を得た。

(2) 平面曲線の輪転曲線としての特徴付けについての新しい方法を得、CMC 回転面に関する古典的な Delaunay の定理を一般化した。さらに、それを用いて、回転対称な非等方的表面エネルギーに対する CAMC 回転面を特徴付けた。また、回転対称とは限らない、より一般の非等方的表面エネルギーに対する CAMC 曲面の二助変数族を構成した。これらの曲面の単位法ベクトル場を用いることにより、ある種の対称性をもつ凸閉超曲面への調和写像の例を構成することができる。

(3) CMC 曲面に対する境界値問題の解の分岐と対称性の崩壊現象について研究し、次の研究成果を得た。すなわち、CMC 回転面であって、回転軸に垂直な平面に対して対称であり、面積の第 2 変分に付随する固有値問題が 0 固有値をもつものからの、CMC 曲面の分岐の存在及び対称性の崩壊を示した。本研究は、より一般のエネルギー汎関数と境界条件に対する変分問題の解の摂動・分岐・対称性の崩壊についての理論へと発展させることができることと期待される。また、等周問題型変分問題の解の分岐における解の安定性の判定の研究に着手した。この問題は、未開拓の分野であり、また、数学のさまざまな問題や自然現象への応用も期待される。今後は是非研究を継続し進展させたい。

(4) 3 次元ユークリッド空間内の種数 0 の CAMC 閉曲面は Wulff 図形及びその相似に限ることを証明した。すなわち、与えられた体積を囲む種数 0 の CAMC 閉曲面は平行移動を除き一意であることを証明した。本結果は、非等方的曲率流方程式の解の極限の候補の決定にも重要な役割を果たすと期待される。また、非等方性をもつ物質の形状決定、あるいは、そのような物質についての観察結果に対する数学的裏付けを与えることに貢献する可能性がある。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

1. Miyuki Koiso and Bennett Palmer, Anisotropic umbilic points and Hopf's theorem for surfaces with constant anisotropic mean curvature, to appear in Indiana University Mathematics Journal,

査読有, Vol.59, No.1, 2010, pp. 79-90.

2. Miyuki Koiso and Bennett Palmer, Anisotropic Surface Energy, Proceedings of the 16th OCU International Academic Symposium 2008 "Riemann Surfaces, Harmonic Maps and Visualization", OCAMI Studies Volume 3, Osaka Municipal University Press, 2010, pp.129-144, 査読有.

3. Miyuki Koiso and Bennett Palmer, Equilibria for anisotropic surface energies and the Gielis formula, Forma, 査読有, Vol.23, No.1, 2008, pp.1-8.

4. Miyuki Koiso and Bennett Palmer, Rolling construction for anisotropic Delaunay surfaces, Pacific Journal of Mathematics, 査読有, Vol.234, No.2, 2008, pp.345-378.

5. Miyuki Koiso and Bennett Palmer, Uniqueness theorems for stable anisotropic capillary surfaces, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 査読有, Vol.39, No.3, 2007, pp.721-741.

6. Miyuki Koiso and Bennett Palmer, Anisotropic capillary surfaces with wetting energy, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 査読有, Vol.29, No.3, 2007, pp.295-345.

[学会発表] (計 13 件)

1. Miyuki Koiso, Stability and bifurcation for solutions of isoperimetric type problems, The 2nd TIMS-OCAMI Joint International Workshop on Differential Geometry and Geometric Analysis, 2010年3月22日, Department of Mathematics, National Taiwan University, Taiwan.

2. Miyuki Koiso, Geometric variational problems and bifurcation theory, The First

CREST-SBM International Conference  
“Random Media”, 2010年1月28日, 仙台国際  
センター, 仙台市.

3. Miyuki Koiso, Variational Problems for  
Anisotropic Surface Energies, 第34回偏微  
分方程式論札幌シンポジウム, 2009年8月26  
日, 北海道大学.

4. Miyuki Koiso, Stability of hypersurfaces  
with constant mean curvature, Differential  
Geometry with Mira, 2009年4月15日, 大阪  
大学理学部.

5. Miyuki Koiso, Stability of hypersurfaces  
with constant mean curvature,  
International Conference “Global Analysis  
and Differential Geometry”, 2009年3月23日,  
佐賀大学.

6. Miyuki Koiso, Geometry and stability of  
rotationally symmetric hypersurfaces with  
constant mean curvature, Integrable  
systems, Geometry and Visualization 2008,  
2008年12月11日, 九州大学.

7. Miyuki Koiso, Anisotropic Gauss map of  
surfaces, One Day workshop on Differential  
Geometry, 2008年11月20日, 佐賀大学.

8. Miyuki Koiso, A free boundary problem  
for surfaces with constant anisotropic mean  
curvature, CONFERENCE Differential  
Geometry, 2008年6月25日, Banach Center  
at the Mathematical Conference Center  
Bedlewo, Poland.

9. 小磯深幸, 非等方的平均曲率一定曲面に対  
する自由境界問題, 研究集会「リーマン幾何  
と幾何解析」, 2008年2月19日, 筑波大学.

10. Miyuki Koiso, A free boundary problem  
for surfaces with constant anisotropic mean  
curvature, The 3rd Geometry Conference  
for Friendship of Japan and China, 2008年1  
月28日, 名古屋大学 野依記念館.

11. 小磯深幸, 非等方的平均曲率一定曲面の  
安定性と一意性について, 部分多様体論・  
2007, 2007年11月23日, 湯沢グランドホテル,  
新潟県湯沢町.

12. 小磯深幸, 非等方的平均曲率一定曲面の  
幾何, 第54回幾何学シンポジウム, 2007年8  
月24日, 鹿児島大学.

13. Miyuki Koiso, Geometry of surfaces  
with constant anisotropic mean curvature,  
Symposium on the differential geometry of  
submanifolds, 2007年7月5日, Valenciennes  
大学, フランス.

[その他]  
ホームページ等  
<http://www.math.kyushu-u.ac.jp/>

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

小磯 深幸 (KOISO MIYUKI)  
奈良女子大学・理学部・教授  
研究者番号: 10178189

##### (2) 研究分担者

藤岡 敦 (FUJIOKA ATSUSHI)  
一橋大学・大学院経済学研究科・准教授  
研究者番号: 30293335  
(H19→H20: 連携研究者)  
安藤 直也 (ANDO NAOYA)  
熊本大学・大学院自然科学研究科・准教授  
研究者番号: 50359965  
(H19→H20: 連携研究者)

##### (3) 連携研究者

#### 研究協力者

Bennett Palmer  
米国・アイダホ州立大学・教授  
Paolo Piccione  
ブラジル・サンパウロ大学・教授