様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21 年 5 月 27 日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007-2008
課題番号：19540221
研究課題名（和文）　m調和写像流の正則性特異性とエネルギー量子化の研究

研究課題名（英文）　Mathematical research on regularity and singularity for the m-harmonic map flows and energy quantization phenomenon

研究代表者
三沢　正史　(MISAWA MASASHI)
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号: 40242672

研究成果の概要：幾何学，物理学に現れる調和写像に関するエネルギー最小化問題を研究した．とくに，エネルギー最急降下曲線である調和写像に対する時間発展，調和写像流，の解の時間大域的存在と解の滑らかさ(連続性，微分可能性)について研究した．調和写像の高次元版であるm調和写像について，その時間発展であるm調和写像流の弱解(数学的な抽象解)の時間大域存在とその解の部分的正則性(滑らかな点とそうでない点の集合を分けること)を証明した．滑らかでない点周りの解の極限がm調和球面(m次元球面から写像先の多様体へのm調和写像)となる，特異点周りの bubbling 現象を証明した．これらは，調和写像に対する結果のm調和写像への一般化である．また，m調和写像に対する自由境界問題を研究し，m調和写像流の弱解の時間大域存在とその解の部分的正則性を証明した．また，自由境界上の特異点周りの解の極限は，m調和球(m次元球から写像先の多様体へのm調和写像)となる，自由境界上の bubbling 現象を証明した．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,700,000	510,000	2,210,000
2008 年度	1,400,000	420,000	1,820,000
年度			
年度			
年度			
総　計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：偏微分方程式論
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：調和写像，調和写像流，m調和写像，m調和写像流，正則性，特異性，エネルギー量子化

１．研究開始当初の背景
リーマン多様体間の調和写像の正則性特異性の問題は，世界で主要な数理解析の課題であり，今だに多くの未解決問題が残されている．調和写像は，エネルギー最小化問題の解として定式化されるが，これまでは，エネルギーの最小化関数である調和写像の存在，その正則性特異性が主に研究され，基本的な定理が証明されていた．一方で，最小化関数でない一般のエネルギーレベルの調和写像については，具体的な例を除いて，一般的には今現在でさえ，その存在，

正則性特異性はほとんど未解決のままである．本研究では，一般のエネルギーレベルの調和写像の存在，その正則性特異性を調べるために，調和写像に対する時間発展，調和写像流という，を利用することとした．これは，エネルギーの最急降下曲線を与えるものであり， 任意の初期値から出発する調和写像流を時間大域的に構成できれば，その時間無限大極限関数は(最小化関数以外の)調和写像になることが期待される．このことが，本研究の動機つけであった．また，調和写像の空間高次元版であるｍ次元領域上のm調和写像は，等角変換のもとで不変であるというゲージ不変性をもち，とくに幾何学的に興味がある．本研究では，調和写像の高次元版であるm調和写像について，とくにその時間発展であるm調和写像流の正則性と特異性について研究する．

２．研究の目的

本研究の目的は，Euclid空間の有界領域から境界なしの滑らかなコンパクトリーマン多様体への調和写像のエネルギーレベルの高い解を見つけることである．このために調和写像の時間発展，調和写像流，の解の時間大域存在とその解の正則性特異性を解明することである．本研究では，とくに，等角的な空間２次元調和写像の高次元版であるｍ次元領域上のｍ調和写像とその時間発展であるｍ調和写像流を研究する．ｍ調和写像流は退化放物型２階編微分方程式で記述されるが，この非線形偏微分方程式の解の存在，解の正則性特異性を研究する．

(１) ｍ 調和写像流の特異性(解が滑らかでなくなる性質)の解析

① ｍ 調和写像流の有限特異時間での挙動の解析：特異点周りでのエネルギー集中現象の解析，とくに，特異点周りでスケール変換された解は，m調和球面(m次元球面から写像先の多様体へのm調和写像)に収束し(bubbling 現象)，特異点では，m次元球面のエネルギーの和の値だけエネルギーの欠損が起こることを意味するエネルギー恒等式の証明．これにより特異点周りでの，エネルギーの量子化を証明する．

② ｍ 調和写像流の時間無限大での挙動の解析：m調和写像流の時間無限大極限は，m調和写像になる．このｍ調和写像に収束すると同時にエネルギーの欠損が起こりうる．m調和写像流のこの時間無限極限の挙動を解析する．有限時間の場合と同様，bubbling現象とエネルギー恒等式，エネルギー量子化を証明する．

(２) 特異点周りでの解の挙動を特徴つけるm調和球面の幾何学的性質，等角性，について研究する．空間２次元の場合には，複素変数の方法(Cauchy-Rieman の関係式，Hopf 微分)によって，調和球面の等角性を証明することができる．高次元の場合には，別の考察が必要である．本研究では，とくに，写像先の多様体が３次元球面である場合に，３調和球面の等角性を調べる．

(３)ｍ調和写像流に対する自由境界問題の研究．自由境界条件を満たすｍ調和写像流の時間大域解の構成とその解の正則性特異性の解析

① 自由境界条件を満たす ｍ 調和写像流の解の正則性条件の構築：m調和写像流の空間局所エネルギーの時間発展の挙動を表す単調性評価の証明．局所エネルギーが十分小さいとき，対応する局所領域上では解が滑らかであることを意味する ε 正則性定理の証明．

②自由境界条件を満たすｍ調和写像流の解の特異性の解析：内部領域の特異点周りの挙動は，前述したことと同様に，m調和球面とエネルギー量子化で特徴つけられることを証明する．とくに，自由境界付近での特異点周りではｍ調和写像流の特異挙動がm調和球(m次元球から写像先の多様体へのm調和写像)によって特徴つけられことを解析する．

３．研究の方法

(１)ｍ調和写像流の正則性特異性がエネルギーの集中，エネルギー集中現象，によって特徴つけられことを証明する．このために，ｍ 調和写像流に対する正則性評価を追及する．とくに，空間局所エネルギーの時間に関する単調性を研究する．エネルギー密度に対するある放物型２階偏微分不等式(Bochner の公式)を使って，エネルギー密度にハルナック不等式を証明し，これと空間局所エネルギーの単調性評価を結びつけることにより，ε 正則性定理(局所エネルギーが十分小さいとき，対応する局所領域上では解が滑らかであること)の証明を行う．

(２)ｍ調和写像流の特異性は，エネルギー集中によって与えられ，そのエネルギーの集中は，さらに，ｍ調和球面(ｍ次元球面から写像先多様体への ｍ 調和写像)のエネルギーの有限和で与えれること意味するエネルギー恒等式を証明する．これによって，エネルギー量子化について研究する．このために，ｍ 調和写像流を特異点周りで時空の変数に関してスケール変換して，その写像族のスケール変数に関する極限を計算する(blow up 解析)．

(３) 特異点周りでの解の挙動を特徴つけるm調和球面の幾何学的性質，等角性，について研究する．とくに，写像先の多様体が３次元球面である場合に，３調和球面の等角性を調べる．３次元球面の断面曲率がヤコビ行列で表されることを利用する．

(４)ｍ調和写像流の特異点付近での漸近対称性の研究．m調和写像流の特異性を詳しく調べるために，ｍ 調和写像流の解をスケール変換した写像族に対して，スケール変数に関して高次の項の収束を調べる．これは，要するに，ｍ 調和写像流の解を特異点周りでスケール変数に関してテーラー展開(漸近展開)することに他ならない．このために，解の高階導関数の連続性評価を行う必要がある．連続係数の評価を精密に行う．

４．研究成果

(１)ｍ調和写像流に対する自由境界問題について，弱解が時間大域的に存在し，この解はエネルギー不等式を満たすことを証明した．さらに，この弱解は，高々有限個の時間を除いて滑らかであることを証明した(論文投稿中)．当初の目的は，特異性が高々”有限個の点”でのみで起こることを証明することを目標としていたのであるが，本研究期間では，“有限個の時間”まで証明できた．この結果は，驚くべきものではないが，目標に向けての第一歩であることは認識されている．一方，特異点の有限性の問題は，今だに未解決である重要な課題である．他方で，m調和写像流の自由境界問題の時間局所解を構成するために，ｍ 調和写像流の線形化放物型方程式に対する正則評価を構築した．これは基本的評価である．

(２)ｍ調和写像流の特異性ついて．m調和写像流に対する自由境界問題について，解の特異点周りでのスケール極限は，ｍ 調和球面となること，とくに，自由境界上の特異点では，ｍ調和球(ｍ次元球から写像先多様体への自由境界条件を満たす ｍ 調和写像)となることを証明した．これらは驚くべき結果ではないが，基本的結果と認識されている．とくに，自由境界上の特異点での極限がｍ調和球になることは，今までに証明されていなかった新しい結果である．ｍ 調和写像流の特異性が，エネルギー量子化によって特徴つけられこと，m調和球面の等角性，さらに，特異点周りの漸近展開の問題は，今後の重要な課題である．

(３) 空間２次元調和写像流(２調和写像流)の弱解に対する正則性条件の改良．とくに，解の空間一階導関数の平均振動が有界であるならば，弱解は滑らかであることを証明した(雑誌論文，①)．この正則性条件は，調和写像流を不変にするスケール変換のもとで不変なものであり，Soboleの埋め込み定理が成り立つぎりぎりの条件という意味で臨界の正則性条件である．これまでの正則性条件を改良した点が，国内外の関係研究者から評価された．今後の問題として，この正則性条件を満たす時間大域解の構成がある．また，高次元のｍ調和写像流に対して同様な正則性条件が成り立つか否かは，興味ある未解決問題である．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 2 件）

① Masashi Misawa, Takayoshi Ogawa, Regularity condition by mean oscillation to a weak solution of the 2-dimensional Harmonic heat flow into sphere, Calculus of Variations and Partial Differential Equations 33, 391-415, 2008, 査読有り
② Tonegawa Yoshihiro, Westdickenberg Maria G., Higher multiplicity in the one-dimensional Allen-Cahn action functional, Indiana University Mathematical Journal 56, no. 6, 2935-2989, 2007, 査読有り

〔学会発表〕（計 5 件）

① 三沢 正史, On a regularity for a class of weak solutions of the harmonic map flows, 広島応用解析セミナー(国際研究集会), 坂口茂, 三上敏夫代表, 2008.9.1-9.4 開催, 2008.9.3 発表, 於広島大学大学院工学研究科
② 三沢 正史, 調和写像流の平均振動による正則性条件について, Nonlinear Partial Differential Equations, SapporoGuest House Symposium onMathematics, Final, 小澤徹, 久保英夫代表, 2008.3.29-3.30 開催, 3.29 発表, 於札幌天神山国際ハウス
③ 三沢　正史, 幾何学に現れる時間発展方程式の解の正則性について, 第７回偏微分方程式ワークショップ, 石渡道徳, 黒木場正城代表, 2008.3.13-3.15, 3.14 発表, 於鹿児島県市町村自治会館
④ 三沢 正史, 一般のregularity theoryに関する討論 I, II, 小川卓克, 黒木場正城代表, 2008.3.4-3.6, 3.5 発表, 於KKRあさくら山口
⑤ 三沢　正史, On a regularity problem for the evolution of constant mean curvature surfaces, Recent Advances on

Nonlinear Parabolic and Elliptic Differential Equation, 森田喜久,二宮広和, 柳田英二代表, 2007.12.3–12.5 開催, 12.3 発表, 於龍谷大学理工学部

６．研究組織
(1)研究代表者
三沢　正史 (MISAWA MASASHI)
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号: 40242672

(2)研究分担者

(3)連携研究者
利根川　吉広（TONEGAWA YOSHIHIRO）（2007年度は研究分担者）
北海道大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 80296748

中島　徹（NAKAJIMA TOHRU ）（2007 年度は研究分担者）
静岡大学・工学部・准教授
研究者番号: 50362182