

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007～2010
課題番号：19540222
研究課題名（和文） リュービルシステムに現れる集中現象と渦点の衝突に関する研究
研究課題名（英文） Study on collision phenomena of blow-up points appear in Liouville systems and those of vortices
研究代表者
大塚 浩史（OHTSUKA HIROSHI）
宮崎大学・工学部・准教授
研究者番号：20342470

研究代表者の専門分野：変分法と非線形偏微分方程式論

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：関数方程式論、関数解析学、応用数学、数理物理、Liouville system、変分法、渦点、点渦

1. 研究計画の概要

本研究は、リュービルシステム(Liouville system) とよばれる非線形楕円型連立方程式系に現れる集中現象、特に、連立方程式の中の個々の方程式の解が、同時に共通の一点の周りに集中現象をおこす「集中現象の衝突」の分類を目標とする。この分類は、リュービルシステムの解の存在証明や解の大域的な分岐構造を把握することなどに必要な基本的な情報であるが、未解明な部分も多い。そこで、これまで調べられていない種類のリュービルシステムにおける問題点を整理することからはじめ、関連すると思われる渦点の衝突の解析や数値的なシミュレーションなど、幅広い視点でこの問題に取り組み新事実を得ることが本研究の目的である。

2. 研究の進捗状況

(1) パレー-スメール条件を仮定できない汎関数の臨界点について：

リュービルシステムを導く汎関数は、種々の計算を保証するコンパクト性を導くパレー-スメール (Palais-Smale) 条件が満たされることが明らかでない。そこで、パレー-スメール条件を用いない臨界点のモース指数を評価する手法を抽象的な形で整備した。

(2) 混合渦点系の平均場方程式の研究：
T. Ricciardi 氏 (Napoli 大学)、鈴木貴氏 (大阪大学) とともに、リュービルシステムの重要な例である混合渦点系の平均場方程式の、考え得る最も拡張されたもの (強度の値が非加算無限種あるような混合渦点系) の爆発解

析 (非有界な解の列の極限の分類) を行った。この方程式 (系) は、関数の 1 パラメータ族が「解」になることに由来する困難さがあり、解の収束極限をできる限り弱い位相で考える新しい解析を行った。その結果、「mass 等式」と呼ばれる、この方程式に発生しうる「集中現象の衝突」を分類するための基礎的な成果を得た。これは、2 種の混合渦点系の場合に知られているものの、自然な拡張になっている。

(3) ゲルファント問題の漸近的非退化性：
(単独) リュービル方程式で記述される非線形固有値問題であるゲルファント問題において、解の爆発列 (最大値が発散する列) の極限において、爆発点 (最大値が発散する点) が有限個の点になり、その位置は、渦点系のハミルトニアン の臨界点になることが知られている (Nagasaki-Suzuki, 1990, Asympt. Anal.)。これに対し、Gladiali-Grossi (2004, Commun. PDE) は、特に 1 点爆発する解の列を考察し、爆発点がハミルトニアン の非退化臨界点である場合、十分爆発に近づいた解が非退化 (線形化問題が非自明解を持たない) であることを示した。これを、M. Grossi 氏 (ローマ大学)、鈴木貴氏 (大阪大学) との共同研究により、一般の多点爆発する解の列に対して拡張した。この事実は、定常渦点系の周辺にある渦点系の挙動が、ゲルファント問題を与える汎関数の等高面により記述される可能性を示唆する重要な事実であり、衝突する渦点を、渦度場を用いて考察する際の重要な指針を与えていると思われる。

3. 現在までの達成度

③やや遅れている。

上記2(2)の研究を通して、最も重要と思われるリュービルシステムである、多種混合系平均場方程式においてさえ、その集中現象の衝突が予想以上に複雑であることが判明したため。

4. 今後の研究の推進方策

3に指摘したことから、既に、幅広い一般のリュービルシステムから渦点系の平均場方程式と呼ばれるグループを対象を絞り込み、当初の想定より、より深い解析的結果(漸近的非退化性)を確立しながら研究を進めている。現在、平均場方程式の類似問題であるゲルファント問題で大きな成果(多点爆発解の漸近的非退化性、上記2(3))が得られ、展望が開けた。この方向で、研究を再構築することが妥当である。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

① Hiroshi Ohtsuka, Toward asymptotic non-degeneracy results for the mean field equations on surfaces, 数理解析研究所講究録 1628 「変分問題とその周辺」, 査読無, 1628, 1-21, 2009

② Hiroshi Ohtsuka, Takashi Suzuki, Local property of the mountain-pass critical point and the mean field equation, Differential Integral Equations, 査読有, 21, 421-432, 2008

③ Hiroshi Ohtsuka, Takasi Senba, Takashi Suzuki, Blowup in infinite time in the simplified system of chemotaxis, Adv. Math. Sci. Appl., 査読有, 17, 445-472, 2007

[学会発表] (計10件)

① 大塚浩史, 点渦系とその平均場について, 日本数学会2010年度年会函数方程式論分科会(特別講演), 2010年3月25日, 慶応大学(神奈川県)

② Hiroshi Ohtsuka, Blow-up analysis for an elliptic equation describing stationary vortex flows with variable intensities in 2D-turbulence, The 7th East Asia PDE Conference, 2009年12月17日, City University of Hong Kong (Hong Kong, China)