

平成21年4月1日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2008

課題番号：19540223

研究課題名（和文） 非線形微分方程式の解の漸近挙動の研究

研究課題名（英文） Research for asymptotic behavior of solutions of nonlinear differential equations

研究代表者

高桑 昇一郎（TAKAKUWA SHOICHIRO）

首都大学東京・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：10183435

研究成果の概要：幾何学，物理学に現れる非線形問題の解明に不可欠である非線形微分方程式の解の漸近挙動に関する問題について，従来の微分方程式論に実関数論，力学系理論を加えた方法による研究を行い，非線形楕円型，放物型微分方程式に対して多くの研究成果を得た．本研究の成果には微分幾何学，トポロジー，数理生態学，最適化理論において重要な結果が含まれている．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	900,000	270,000	1,170,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,600,000	480,000	2,080,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：多様体上の解析，非線形現象，関数方程式の大域理論

## 1. 研究開始当初の背景

これまでの研究では山辺の問題，調和写像，Yang-Mills 接続のような微分幾何学に現れる非線形楕円型の偏微分方程式について解全体のつくる集合の研究を行ってきた．解全体のつくる集合（モデュライ空間）においてどのような部分集合がコンパクトになるかという問題を研究した．部分集合がコンパクトにならない場合は解から定まる共形不変量の密度が有限個の点に集中する現象を見出した．この研究をさらに続けていった結果，より一般の場合には部分集合がコンパクト

にならない場合は解のエネルギー密度が点ではなく曲線や曲面の高次元の集合に集中することを見出し，その集合の解析のためにはより深い実関数論のアプローチが必要であることに気づき本研究の動機となった．また，発散する解の列を収束列に変換することは繰り込み群の理論の初歩的な事柄であり，高次元の集合の付近での解の漸近挙動を調べるためには，より深い繰り込み群の理論を数学的に定式化した理論が必要になることがわかったことも本研究の動機である．

## 2. 研究の目的

非線形微分方程式の研究においてその解が具体的に記述できることは稀である。よって、解の存在を示しただけでは不十分であり、様々な応用を考えるには解の性質に関する研究が不可欠である。本研究では、物理学、幾何学に現われる非線形微分方程式を対象に、解の漸近挙動に関して、次の5つの問題の解明を目的とする。

- (1) 時間変数, 空間変数に対する無限遠での解の漸近挙動
- (2) 解の特異点の近傍での漸近挙動
- (3) 解または近似解の収束に現れる特異極限
- (4) 繰り込み群の理論, 超対称性理論の数学的定式化とその漸近解析への応用
- (5) 上記の4つの問題に対して得られた研究成果の応用

## 3. 研究の方法

(1) 幾何学, 物理学に現れる非線形楕円型, 放物型の偏微分方程式に対して, これまでの偏微分方程式論, 関数解析の手法を用いた研究に実関数論, 力学系理論を加えて発展させることを目的として行った。

① 数理生態学, 反応・拡散および反応・移流現象におけるパターン形成を記述する非線形偏微分方程式の解の漸近挙動の研究を高桑と倉田により調和解析, ポテンシャル論を用いて行なった。

② 平田は, 非線形放物型方程式を無限次元空間の力学系として記述することを行ない, カオス現象解析の視点の下で力学系理論を用いた解の解析を行った。

③ 中内は高桑とともに, 幾何学の非線形問題の解の特異点の近くでの漸近挙動と解全体のつくる空間 (モデュライ空間) の構造について幾何学的測度論を用いた研究を行なった。

(2) この研究は, これまでに得られた結果の他の問題への応用である。高桑, 倉田はこれまでに結果が得られた微分方程式について, 指定された漸近挙動をもつ解の存在の問題について研究を行った。平田は力学系, エルゴード理論の応用についての研究を行った。中内は, 幾何学の非線形問題について, これ

までに得られた解の漸近挙動に関する結果を用いて, 解のつくるモデュライ空間の構造の解析を行なった。赤穂は本研究において繰り込み群, 超対称性理論の数学的定式化から得られた漸近解析の手法を微分幾何, シンプレクティック幾何, トポロジーの問題への応用の研究を行った。

## 4. 研究成果

(1)  $p$ -調和写像のつくる空間の解析的性質についての研究を行った。 $n$ 次元 Riemann 多様体  $M$  から別の Riemann 多様体  $N$  への  $p$ -調和写像の列は  $p$ -energy が一様有界でもコンパクトになるとは限らないことが知られているが,  $p$  が  $n$  未満の自然数の場合にはコンパクト性が成り立たない場合に障害として現れる  $(n-p)$  次元の部分集合  $S$  が rectifiable 集合 (高々可算個の1階連続微分可能な部分多様体の和として表せる) であることを示し, さらに defect measure と呼ばれる  $S$  上の Radon 測度が  $(n-p)$  次元の Hausdorff 測度と rectifiable 集合を用いて具体的に記述できることを示した。 $S$  が有限集合の場合は defect measure はデルタ関数の和となり, さまざまな問題について非常に多くの結果が得られているが,  $S$  の次元が高い場合には, 本研究と同様の結果はわずかな場合しか見つかっていない。

その結果の応用として  $p$ -調和写像の1階微分の評価を得た。 $p$ -energy 密度を用いて定義されるポテンシャルが一様有界であるような  $p$ -調和写像の1階微分はポテンシャルの上限を用いて評価できることを示した。

さらに,  $p$ -調和写像のつくる空間のコンパクト性に関する結果として, ユークリッド空間上の  $p$ -調和写像に対する Liouville の定理を証明した。

(2) 調和関数が満たすことが知られていた Carleman 型不等式を用いて平面の非有界領域における極小曲面や調和写像の Dirichlet 境界値問題の解の一意性の研究を行った。

(3) 数理生態学におけるパターン形成モデルとして有名な Gierer-Meinhardt 系で, 特に

弱い意味での飽和効果が考慮された反応拡散方程式系において、軸対称領域上で、いくつも指定した有限個の点に凝縮した形状をもつ定常解の構成に成功した。一般の領域上でも、シャドウ系と呼ばれる場合には、1点に凝縮する定常解の存在はその Wei と Winter によって 2004 年に与えられていた。我々の結果は Wei-Winter の結果と飽和効果のないモデルに対する Ni-Takagi の結果 (1995) を補完するものといえる。

(4) 2000 年に行った Dirichlet 第 1 固有値最適化問題の研究、2004 年に行った非線形熱伝導問題における非線形最適化問題の研究に続き、Dirichlet 境界条件下で、拡散効果を持ったロジスチックモデルにおける漁獲最適戦略問題を提唱し、対応する数理モデルにおける最適戦略解の存在、定性的および定量的性質の研究を行った。この問題は、ある制限された条件を満たす捕獲戦略のうち、魚の定常パターンが持つエネルギーを最小にするような捕獲戦略は何か？を問うもので、漁獲量を最大にする戦略等とは異なり、魚（あるいは魚の環境）にとって最もよい捕獲戦略を考える問題ともいえる。

(5) 非線形な力学系に特有の現象であるカオスの現象に関して、主に軌道の再帰時間分布の性質を通じて解析をした。主な研究成果は以下のようなものである。

- ① 非一様な双曲型力学系で、不変測度が無限測度になる場合の再帰時間の極限分布について、滑らかな 1 次元力学系の場合について解析し、再帰時間を正規化する際の適当な方法を見出し、極限分布の形を明らかにした。
- ② 無限不変測度を持つカオスの力学系の様々な指標（相関関数の減衰オーダーなど）と再帰時間の極限分布との関係について考察し、不動点の周辺における振る舞い（具体的には 1 次元モデルの  $y = f(x)$  と  $y = x$  との接触のオーダー）と極限分布の形との関係を明らかにした。

(6) 主にラグランジュはめ込みのフレアー理論の研究を行った。深谷・Oh・太田・小野はラグランジュ部分多様体に境界値をもつ種数 0 の

安定写像のモジュライ空間を用いて A 無限大代数を構成したが、それをラグランジュはめ込みの場合まで一般化することに成功した。

(7) 共形幾何構造の応用も含めた n-調和写像の研究を行った。研究の過程で共形性を特徴づける汎関数が関連していることがわかり、その汎関数の変分問題についての研究を進めた。弱解の存在、monotonicity formula タイプの積分等式などが得られた。解の正則性（部分正則性）については、Moser の iteration technique を用いるために、被積分関数量の微分等式を導いたが、その曲率項が非負であるという仮定のもとでも、まだ評価できていない項が一つあり、研究が現在進行中である。

5. 主な発表論文等  
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

① Kurata Kazuhiro and Kotaro Morimoto  
Construction and asymptotic behavior of multi-peak solutions to the Gierer-Meinhardt system with saturation, Comm. Pure Appl. Anal. Vol.7 (2008), 1443-1482. 査読有

② Kurata Kazuhiro and Junping Shi  
Optimal Spatial Harvesting Strategy and Symmetry Breaking, Applied Math. Optim., Vol.58(2008), 89-110. 査読有

③ Kurata Kazuhiro and Matsuzawa Hiroshi  
Multiple stable patterns in a balanced bistable equation with heterogeneous environments, 数理解析研究所講究録 {bf 1591} (2008), 「変分問題とその周辺」134-142. 査読なし

④ Akaho, Manabu  
Quasi-isomorphisms of  $A^\infty$ -algebras and oriented planar trees. Illinois J. Math. 51 (2007), no. 2, 325-338 査読有

⑤ Akaho, Manabu  
Morse homology and manifolds with boundary. Commun. Contemp. Math. 9 (2007), no. 3, 301-334 査読有

〔学会発表〕(計 21 件)

①平田 雅樹

「An approach to the new characterization of chaotic phenomena by the return times」, ワークショップ「Infinite ergodic theory and its applications」, (2009年3月) エコール・ポリテクニーク (フランス)

②赤穂 まなぶ

「Lagrangian mean curvature flow and symplectic area」 大阪市立大学数学研究所・台大数学科学研究中心 (国立台湾大学) 共催 微分幾何学・幾何解析ワークショップ (2009年3月9日10日) 大阪市立大学

③倉田 和浩

「An optimization of the least energy for some nonlinear elliptic boundary value problem」 広島応用解析セミナー (第10回) (2009年2月10日) 広島大学

④赤穂 まなぶ

「Immersed Lagrangian Floer theory」 Fujisan 1-day Workshop in Geometry and Topology (2008年12月27日) Department of Mathematics, National Cheng Kung University

⑤高桑 昇一郎

「非有界領域上の極小曲面の方程式に関する Meeks の予想」 研究集会「多様体上の微分方程式」(2008年12月1日~3日) いしかわシティカレッジ

⑥倉田 和浩

「Boundary blow-up solutions to a reaction-diffusion equation with Allee effect and its application」 ワークショップ「非線形偏微分方程式における定常問題」(2008年12月9-10日) 神戸大学

⑦平田 雅樹

「再帰時間スペクトルについて」 研究集会「複雑系の数理」(2008年12月) 法政大学

⑧倉田 和浩

「反応拡散方程式の定常解の構成について」 「冬の学校」(2008年11月21-22日) 九州大学

⑨赤穂 まなぶ

「Lagrangian mean curvature flow and symplectic area」 幾何学コロキウム (2008年11月14日) 北海道大学

⑩平田 雅樹

「再帰時間スペクトルとその応用」 早稲田シンポジウム「無限測度のエルゴード問題とその周辺 III」(2008年10月) 早稲田大学

⑪赤穂 まなぶ

「ラグランジュはめ込みのフレアー理論」 第55回幾何学シンポジウム(2008年8月22日-26日) 弘前大学

⑫倉田 和浩

「Construction and asymptotic behavior of multi-peak stationary solutions to the Gierer-Meinhardt system with weak saturation on axially symmetric domains」 Ryukoku Workshop 2008 (2008年6月12-14日) 龍谷大学

⑬倉田 和浩

「Multiple stable patterns in a balanced bistable equation with heterogeneous environments」 7th AIMS International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations and Applications, (2008年5月18-21日) University of Texas

⑭倉田 和浩

「Construction and asymptotic behavior of the multi-peak stationary solutions to the Gierer-Meinhardt system with weak saturation」 九州における偏微分方程式研究集会 (2008年1月28-30日) 九州大学

⑮高桑 昇一郎

「p-調和写像の空間のコンパクト性」 研究集会「多様体上の微分方程式」(2007年12月10日~12日) いしかわシティカレッジ

⑯平田 雅樹

「Return time distribution and Strength of Chaos」, 研究集会「Chaos and Complexity」(2007年12月) 法政大学

⑰平田 雅樹

「再帰時間分布によるカオスの特徴付けに向けて」, 早稲田シンポジウム「無限測度のエルゴード問題とその周辺 II」(2007年11月) 早稲田大学

⑱倉田 和浩

「Construction and asymptotic behavior of the multi-peak solutions to the Gierer-Meinhardt system with saturation」 国際研究集会「First Chile-Japan Workshop on Nonlinear Elliptic and Parabolic PDE」(2007年10月23日-26日) Santiago, Chile

⑱ 赤穂 まなぶ

「Floer homology for Lagrangian immersions」Towards Relative Symplectic Field Theory (2007年9月28日) CUNY Graduate Center, New York City

⑳ 倉田 和浩

「Multiple stable patterns in a balanced bistable equation with heterogeneous environments」研究集会「変分問題とその周辺」(2007年6月19日-21日) 数理研

㉑ 赤穂 まなぶ

「Floer homology and concave ends」Seminar im Sommersemester 2007, Topics in Symplectic Geometry (2007年5月11日) University Munich

[その他]

[プレプリント] (計2件)

Takakuwa Shoichiro

A compactness theorem for harmonic maps whose energy densities have uniformly bounded potentials

Hirata Masaki

On the limit distribution of the hitting time of non-uniformly hyperbolic systems

[ホームページ]

<http://www.se.tmu.ac.jp/mis>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高桑 昇一郎 (TAKAKUWA SHOICHIRO)  
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：10183435

(2) 研究分担者

倉田 和浩 (KURATA KAZUHIRO)  
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：10186489

平田 雅樹 (HIRATA MASAKI)  
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：70254141

赤穂 まなぶ (AKAHO MANABU)  
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：30332935

(3) 連携研究者

中内 伸光 (NAKAUCHI NOBUMISTU)  
山口大学・大学院理工学研究科・准教授  
研究者番号：50180237