様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 22 年 5 月 20 日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007～2009
課題番号：１９５４０２２５
研究課題名（和文）　離散的函数方程式の有理型函数解の研究

研究課題名（英文）　Meromorphic solutions of discrete functional equations

研究代表者
石崎　克也（ISHIZAKI KATSUYA）
日本工業大学・工学部・教授
研究者番号：６０２０２９９１

研究成果の概要（和文）：複素平面上で差分方程式，Schroeder 方程式のように微分などの極限操作を含まない離散的函数方程式の超越的有理型解の性質について値分布理論を用いて考察した。また，増大の位数の小さい整函数の合成函数に関する評価式の精密化に取り組んだ。ここでは，ある増大の条件を満たす整函数の評価式については除外区間を取り去ることに成功した。応用として，超越整函数を定義方程式に持つ，Schroeder 函数の増大度を考察した。複素力学系と関わりの深い合成型の函数方程式 f(G(z))=R(f(z))を調べ，既知の定理を可視化して定理の精密化をした。

研究成果の概要(英文)：We consider functional equations in the complex domains by means of the value distribution theory. In particular, discrete functional equations are discussed, for examples, difference equations and Schroeder equations. To do this, we are concerned with the growth of the composition of entire functions of slow growth. We obtain an estimate for composite functions without exceptional set. As an application, we apply this estimate to a Schroeder equation with a transcendental function. We also consider a functional equation $f(G(z)) = R(f(z))$ from the view points of complex dynamics. By visualizations of some examples for known result, we posed a question. We solve it in general.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	1,000,000	300,000	1,300,000
２００８年度	800,000	240,000	1,040,000
２００９年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	2,700,000	810,000	3,510,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：差分方程式，q-差分方程式，Schroeder 方程式，Composite 函数方程式，Nevanlinna 理論，複素力学系，Wiman-Valiron 理論，半共役

１．研究開始当初の背景

本研究課題では，複素平面上においてある種の函数方程式の有理型函数解の存在と，その特性を調べることを研究目標とした。

常微分程式の解を取り扱う場合とは異なり，定義方程式に極限操作を含まない函数方程式の解を取り扱う場合はその離散的な特徴を考慮することが重要と考えた。 差分方程式，q-差分方程式，Schroeder 方程式に代表されるような離散的函数方程式は，ある操作の繰り返しによってその解の存在や特性が導かれることに特徴がある。 一方で，常微分程式を取り扱うときに有効であった微分を含む評価式は効力を失うことから，離散的函数方程式に対応する理論の構築が必要と考えた。

(1) 研究開始当初の背景として，値分布理論で函数方程式の解を取り扱う場合に必要な差分と q-差分について対数微分の補題の類似が証明され，差分型の理論構築のみを考えても重要な研究課題であったといえた。実際，対数微分の定理は Nevanlinna の２つの主要定理を結ぶ重要な定理である。これは，$f'(z)/f(z)$の近接関数を評価したものである。仮に$f(z+1)/f(z)$や$f(qz)/f(z)$の近接関数に対して精度の高い評価が得られるとすると，第２主用定理を始めとする値分布論の中での重要な定理の類似が導き出されると考えられた。

(2) $f'(z)/f(z)$の$|f(z)|$が最大値を与える点の近くでの振る舞いについての Wiman--Valiron 理論についても類似が考えられた。$f(z+1)/f(z)$や$f(qz)/f(z)$の$|f(z)|$が最大値を与える点の近くでの振る舞いについて，良い評価が得られるとすると差分方程式や q-差分方程式への応用が可能と期待された。この当時，代表者は”Wiman--Valiron method for difference equations”, K. Ishizaki and N. Yanagihara, Nagoya Math. J. 175 (2004), 75-102 の研究を発展させることを考えていた。上記論文の中では位数 1/2 未満の整函数について$f(z+1)/f(z)$の評価に成功して，ある種の差分方程式への応用ができた。位数についての条件を緩めること，他の差分方程式への応用などを考えることは自然であった。この時期に英国とフィンランドのグループ，中国のグループが独立して$f(z+1)/f(z)$の近接関数についての評価および位数の条件を弱めることに盛んに取り組んでいた。

(3) 離散函数方程式の解は，複素力学系理論の中で重要な役割をはたす。Schroeder 方程式の解に加えて，半共役をあたえる函数方程式の解の性質について，値分布理論と複素力学系理論の間に辞書をつくることも重要と考えていた。

２．研究の目的

微分ではなく離散的な作用をさせたもの，例えば差分では$f(z+1)$と$f(z)$，q-差分では$f(qz)$と$f(z)$との比については，あまりなされてはこなかった。

(1) 研究開始当初の目的のひとつは，$f(z+1)/f(z), f(qz)/f(z)$について精度の高い評価式を得ることであった。
Nevanlinna 第２主用定理と密接な関係のある対数微分の定理は超越的有理型函数$f(z)$とその導関数$f'(z)$との比$f'(z)/f(z)$が値分布論の中では増大度が大きくないことを主張している。

(2) Wiman-Valiron 理論の中でも$f'(z)/f(z)$の振る舞いは最大値を与える点と中心指数を用いて表現されている。

研究開始当初，応用面の必要性からいくつかの条件のもとで$f(z+1)/f(z), f(qz)/f(z)$についての評価式が登場してきていた。 例えば，“Nevanlinna theory for the q-difference operator and meromorphic solution of q-difference equations”, R. G. Halburd et al., to appear in Proc. Royal Soc. Edinb. などがあった。 函数論的見地から考えると改善の余地を残していると考えWiman-Valiron理論の離散型の構築を研究目標にあげた。

(3) 複素力学系の研究において，Schroeder 方程式 $f(s z)=R(f(z))$ ，($|s|>1, R(w)$ はwについての有理函数)はしばしば登場する。値分布理論における，Borel 方向，Julia 方向は値の密集している場所で有理型函数の特徴的な部分であるが，R の Julia 集合 $J(R)$もまた非安定な部分である。ここに時点に至るまでの研究で，Borel 方向の Schroeder の方程式の解fによる像と$J(R)$との関係は明らかにされていた。 当初は更にSchroeder函数の値分布論的性質をその定義有理函数の複素力学系的性質に辞書的に如何に書き換えるかを問題意識とした。

３．研究の方法

本研究課題に対し，実際に取り組んだ時の研究方法について纏めることにする。

(1) <u>離散的函数方程式への値分布論の応用</u>：

研究の遂行にあたり，連携研究者・藤解和也金沢大学准教授と$f(z+1)/f(z), f(qz)/f(z)$の評価式の研究の先駆者である先生方の招聘を計画し実行した。 海外研究協力者・Ilpo Laine Joensuu 大学教授，海外研究協力者・Risto Korhonen Helsinki 大学講師をお招きし，知識の提供を受けた。

複素平面上で微分方程式を値分布理論で考察する方法は昔から知られていて，除外区間は問題にならない場合が多い。しかしながら，離散的函数方程式の場合は除外区間を無視することはできず，どの程度取り除くことができるかはまず取り組まなければならない重要な問題であった。この研究では，離散的函数方程式の定義方程式に増大の位数の小さい整函数を含む場合から考察をした。まず準備として，整函数の合成函数についての評価式の精密化に取り組み， ある増大の条件を満たす整函数について，除外区間を取り去ることに着手した。具体的には，Boas による増大の位数が零である函数の増大度の下からの評価， Clunie による Wiman-Valiron 理論の評価式を利用した。実際には，ある増大度を持つ超越整函数の Valiron－Mohon'ko 型定理を導くことを目標とした。

応用として超越函数を定義方程式に持つ Schroeder 函数の増大度を考察した。

(2) <u>離散函数方程式と複素力学系</u>

研究の遂行にあたり，連携研究者・諸澤俊介高知大学教授と函数方程式論と複素力学系理論の間の辞書を作りながら研究を進めた。

函数方程式論において，2 つの函数G（整函数），R（有理型函数）に対し函数方程式 (*) $f(G(z))=R(f(z))$の解の存在は，複素力学系理論では，函数GとRが半共役(Semi-conjugate)であることを意味する。半共役な 2 つの函数には，それらの Julia 集合の間に Bergweiler and Hinkkanen によって示された包含関係がある。この性質が空論にならないように解の存在の確認が必要である。研究は，まず解の存在定理と具体例の構築から始めた。具体例から包含関係を可視化することで，そこから生じる問題を設定し，取り組んだ。

４．研究成果

本研究期間に得られた主な結果について，「３．研究の方法」で分類をした項目に沿って述べることにする。

<u>(1) 離散的函数方程式への値分布論の応用</u>：

① Fは超越整函数として

$$log\,M(r,F)=K(log\,r)^p(1+o(1)),$$

を満たすとする。ここで，$K>0$, $p>1$は定数である。このとき，

$$loglog\,M(r,F(f)) = p\,log\,log\,M(r,f)(1+o(1))$$

が成り立つ。(注　除外区間は無い)

② Schroeder 方程式

$f(sz) = F(f(z))$,

ここで，Fは整函数，sは$|s| > 1$を満たす定数とする。

②-1 Fが超越的ならば，Schroeder 函数の下位数は無限大である。

②-2 超越整函数Fが①の条件を満たすとする。このとき，

$$loglog\,M(r,f) = A(r)r^b,$$

ここで $b = log\,p/log|s|$, $A(r)$ は $K_1 < A(r) < K_2$を満たす。 K_1，K_2は正定数。

(2) <u>離散函数方程式と複素力学系</u>

2 つの函数，G, Rを与えられた函数し，fを未知関数とする函数方程式

$$(*)\ \ f(G(z))=R(f(z))$$

について

① G,Rを多項式とする，函数方程式について以下のことが成り立つ：

G,Rの次数が共に 2 であれば，多項式解が存在する。G,Rの次数が共に 3 であれば多項式解の存在するための必要十分条件は$G'(0)$, $R'(0)$ の値が共に 2 または 4 であることである。

② Gを多項式として，Rを有理型函数とする。 Gの固定点のひとつをmとし，$R(0)=0$を仮定する。$G'(m) = R'(0)(=b)$, $|b|>1$ならば，mの近傍で局所解が存在する。

③ G, Rを多項式fで半共役な多項式とする。即ち，函数方程式(*)が多項式解fを持つとする。このとき，

$$f(J(G))=J(R),$$

ここで，$J(G)$, $J(R)$はG,Rの Julia 集合である。

今後の課題： 研究当初に掲げた q-差分方程式についての Wiman-Valiron 型定理の構築が行うことができなかったので実行に移したい。値分布理論の差分型，q-差分型の定理はかなり進展を見せた。一方で具体的な函数解の構成は進んでいない。例えば，差分 Riccati 方程式の解や，線形２階の差分方程

式の複素振動など，常微分方程式では基本的とされる部分の構築が遅れている。
複素力学系での関係では，線形ｑ差分方程式で定義される増大位数の小さな超越整函数について研究の余地が残されている。

今回，取り扱った函数方程式(*)について述べれば，局所解がどこまで解析接続できるか，(*)の解の合成の意味での既約性の問題などが今後の課題である。

５．主な発表論文等

（研究代表者，研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① 石崎克也・諸澤俊介・矢古宇光徳，Semi-conjugate functions in the complex plane, Report of Researches Nippon Institute of Technology，査読無，39巻，2010，pp. 142-145.

② Katsuya Ishizaki and Nobushige Toda, Transcendental meromorphic solutions of some algebraic differential equations， 査読有，82巻，2007，pp. 1-24.

〔学会発表〕（計４件）

① 石崎克也・諸澤俊介・矢古宇光徳，Meromorphic solutions of functional equations $f(G(z))=R(f(z))$，等角写像・値分布論　合同研究集会，2009年12月5日，東北大学

② 石崎克也，Entire functions of small order of growth, XXI Rolf Nevanlinna Colloquium，2009年９月９日，京都大学

③ 石崎克也，On factorization of meromorphic solutions of some functional equations，等角写像・値分布論　合同研究集会，平成20年11月30日，金沢大学

④ 石崎克也，Difference operator and value distribution theory，等角写像・値分布論　合同研究集会，平成19年12月９日，慶應義塾大学

〔その他〕

ホームページ等

http://leo.nit.ac.jp/~ishi/ishi-top.htm

６．研究組織

(1)研究代表者

石崎　克也（ISHIZAKI KATSUYA）
日本工業大学・工学部・教授
研究者番号：６０２０２９９１

(2)研究分担者

森　正気　(MORI SEIKI)
山形大学・理学部・教授
研究者番号：８０００４４５６
(H19→H20:連携研究者)

下村　俊　(SHIMOMURA SHUN)
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号：００１５４３２８
(H19→H20:連携研究者)

諸澤　俊介　(MOROSAWA SHUNSUKE)
高知大学・理学部・教授
研究者番号：５０２２０１０８
(H19→H20:連携研究者)

藤解　和也　(TOHGE KAZUYA)
金沢大学・理工学域・准教授
研究者番号：３０２６０５５８
(H19→H20:連携研究者)

(3)連携研究者