

機関番号 : 32601
 研究種目 : 基盤研究 (C)
 研究期間 : 2007 年度 ~ 2010 年度
 課題番号 : 19540226
 研究課題名 (和文) 多変数可換微分作用素系の構成と分類
 研究課題名 (英文) Construction and classification of systems of multi-variable commutative differential operators
 研究代表者
 谷口 健二 (TANIGUCHI KENJI)
 青山学院大学・理工学部・准教授
 研究者番号 : 20306492

研究成果の概要 (和文) : 可換微分作用素系に関連する研究を行い, その結果として次の成果が得られた.

- (1) 階数 2 で逆 2 乗の有理関数ポテンシャルを持つ可換微分作用素対の特異直線の配置は, BC 型サザーランド模型のポテンシャル関数の停留点によって決まること.
- (2) Spin(2n, 2) の離散系列ウィッターカー関数の明示公式.
- (3) 標準ウィッターカー (g, K)-加群を定義. 無限小指標が generic な場合と, 群が U(n, 1) で無限小指標が整の場合について, その構造を決定した.
- (4) q-超幾何関数のみならず三項間隣接関係式の導出とその応用.

研究成果の概要 (英文) : We studied several topics related to the systems of commutative differential operators. Obtained results are as follows:

- (1) The arrangement of singular lines of a pair of commutative differential operators of rank two with an inverse square potential function is determined by the stationary points of the potential function of BC-type Sutherland model.
- (2) The explicit formula of the discrete series Whittaker functions on Spin(2n,2).
- (3) The standard Whittaker (g,K)-modules are defined. Their structures are determined when (i) the infinitesimal character is generic, and (ii) the group is U(n,1) and the infinitesimal character is integral.
- (4) Three-term relations between interpolation polynomials for a BC_n-type hypergeometric series.

交付決定額

(金額単位 : 円)

	直接経費	間接経費	合計
平成 19 年度	900,000 円	270,000 円	1,170,000 円
平成 20 年度	700,000 円	210,000 円	910,000 円
平成 21 年度	700,000 円	210,000 円	910,000 円
平成 22 年度	800,000 円	240,000 円	1,040,000 円
年度			
総計	3,100,000 円	930,000 円	4,030,000 円

研究分野 : 数物系科学

科研費の分科・細目 : 数学・大域解析学

キーワード : 可換微分作用素. Calogero 模型. Whittaker 模型. q-差分方程式. q-超幾何関数.

1. 研究開始当初の背景

自由度 n の量子力学的完全可積分系とは,

そのハミルトン作用素 $H=P_1$ を含む代数的に独立な n 個の微分作用素 P_1, \dots, P_n の族であって, 互いに可換なものが存在する

ような量子力学模型のことである。

このような系としてカロジェローモーザー-サザーランド模型(CMS 模型)が知られているが、これはワイル群の作用に関して不変な微分作用素からなる。

大島利雄と関口英子は、可換微分作用素系の分類問題を、対象空間上の不変微分作用素環の一般化として捉え、対称性に注目し、 P_1, \dots, P_n がワイル群不変性を持つ場合に、ポテンシャル関数としてどのようなものが許されるか、という問題を提唱し、両氏と落合啓之により、ワイル群が古典型の場合については、ポテンシャル関数の分類と可換系 P_1, \dots, P_n の明示公式が得られた。

一方、ヴェゼロフを中心とする研究者グループにより、CMS 模型の可積分性を保つ変形理論が研究されている。彼らの結果によれば、ワイル群が A 型または B 型で、一部の結合定数が 1 の場合には、CMS 模型の対称性を崩した可積分変形が存在し、変形されたルート系によってポテンシャル関数が記述されることが知られている。

研究代表者はこのような変形が可能となるための必要条件について研究を行い、CMS 模型のようにポテンシャル関数が原点を通る超平面に沿って逆 2 乗の特異性を持つ場合、変形が可能となるのは一部の結合定数が整数であるときに限ることを示した。また研究代表者は、非自明な場合で最も簡単な A₂ 型の CMS 模型の変形は、既にヴェゼロフたちが構成したもので尽くされることを示し、一方 B₂ 型の場合には、一部の結合定数が 2 であって、他の結合定数が特殊な場合には、ヴェゼロフたちのものと異なる可換微分作用素対を構成した。

2. 研究の目的

「背景」で述べた状況を踏まえ、本研究ではワイル群の対称性を持たないような新たな多変数可換微分作用素系を系統的に構成し、分類することを最大の目標とする。その中でも既に研究が進んでいる、逆 2 乗の特異性を持つ場合を特に重点的に調べたい。

可換な微分作用素がワイル群の不変性を持つ場合であっても、ワイル群が例外型の場合には、可換微分作用素の明示公式は得られていないので、その構成も行う。

以上の研究を行った上で、これら新たな可換系の固有関数の構成を行うこと、およびその q -類似とその固有関数系の構成という問題についても研究を行う。

3. 研究の方法

ワイル群不変性を仮定せずに可換微分作用素系を調べるとき、ラックス対やダンクル

作用素といった既に知られている手法を用いることはできない。そのため微分作用素の交換子を精密に調べ、そこから情報を引き出すという地道な作業が必要となる。

そこで本研究では、まず 2 変数の場合、特に逆 2 乗の特異性を持つ場合について徹底的に調べることから始め、それをより変数の多い場合に拡張する計画で研究を始めた。

ポテンシャル関数が必ずしも特異性を持たないような可換微分作用素系や、特異性を持つが結合定数が大きい場合については、思うような結果が得られなかったため、可換ではないが、それに近い微分作用素系の研究を行った。具体的には、離散系列ウィッターカー関数を、ディラック作用素を用いて特徴付けることを行った。またこの研究を発展させ、標準ウィッターカー (g, K) -加群を定義し、それをディラック作用素と行列式型中心元を用いて特徴付ける研究を行った。

4. 研究成果

階数 2 で逆 2 乗の有理関数ポテンシャルを持つ可換微分作用素対の特異直線の数が 5 以上の場合に、特異直線の配置と可換微分作用素対の構成について考察を行った。その結果、結合定数がある特定の値である場合の特異直線配置を決定するには、BC 型サザーランド模型のポテンシャル関数の停留点を求めることが必要であることがわかり、さらにペレロモフの結果を用いれば、その停留点はヤコビ多項式の零点として表されることがわかった。しかし階数 2 の有理関数ポテンシャルの場合には、ベレストルーチェンコとチャリヒーフェイギン-ヴェゼロフによる研究があり、本研究の結果は彼らの結果に含まれることがわかった。

次に、ポテンシャル関数が必ずしも特異性を持たないような可換微分作用素系や、特異性を持つが結合定数が大きい場合について考察を行ったが、これについては思うような結果が得られなかった。

そこで可換ではないが、それに近い微分作用素系の研究を行った。このような微分作用素系は、リー群の表現の行列成分を特徴付ける微分方程式系によく現れ、表現論を用いて典型例を構成することには意味があるであろう。このような理由から、不定値スピノル群 $\text{Spin}(2n, 2)$ の離散系列ウィッターカー関数に関する研究を行い、この場合のウィッターカー関数はホルン系と呼ばれる超幾何偏微分方程式系によって特徴付けられることを示し、更にその解のバーンズ型積分表示を得た。

このウィッターカー関数の研究を発展させる形で、標準的ウィッターカー (g, K) -加

群を定義し、その構造を詳しく調べた。これは岩沢冪単部分群のユニタリ指標から誘導された表現空間を、自然な条件の下で細分化したものである。この加群は主系列表現とある意味で近いものであり、最高ウェイト加群や主系列表現の組成列問題として名高いカジューダンスティック予想 (KL 予想) との関連が期待できるため、その組成列や組成因子の研究は表現論の問題として興味深い。

第一の結果は、無限小指標が generic なときの組成列についてである。一般の実簡約型リー群に対し、無限小指標が generic なら標準ウィッターカー (g, K) -加群は完全可約であることを示した。これによって generic なときには、加群の構造が完全に決定できた。

第二の結果は、無限小指標が整のとき、つまり主系列表現が可約な場合に対応する標準ウィッターカー (g, K) -加群の構造に関する結果である。今回は不定値ユニタリ群 $U(n, 1)$ の場合について研究を行い、その加群の組成列を完全に決定した。この結果によれば、標準ウィッターカー (g, K) -加群の組成列と主系列表現の組成列との間には類似点と相違点が共にあり、今後他の一般の群の場合へ研究を広げる際の礎ができたと考えている。また今回の結果を詳細に分析して一般化させることにより、標準ウィッターカー (g, K) -加群の観点を取り込んだ形で KL 予想の理論を進展させることや、逆に KL 予想の研究で培われた手法を標準ウィッターカー (g, K) -加群の研究に応用することが期待できる。

連携研究者 (当初は研究分担者) 伊藤は、可換微分作用素系に関連した研究として、 BC_n 型ジャクソン積分に付随するホロノミック q -差分方程式系に関して、それに付随するロンスキー型行列式そのものが q -ガンマ関数の積で表示できることを示した。また、 G_2 型マクドナルド多項式を固有関数にもつ可換 q -差分作用素を具体的に構成した。また、 BC_n 型 q -超幾何関数が満たす三項間隣接関係式を導出することで、その超幾何関数が満たす連立一階 q -差分方程式系の具体形を明らかにした。その応用として、グスタフソンによる q -超幾何積分の無限積表示に対して別証明を与えた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

- (1) Ito, Masahiko: Three-term relations between interpolation polynomials for

a BC_n basic hypergeometric series, *Advances in Mathematics*, 査読あり, 226 (2011), 4096-4130

- (2) 谷口健二: $U(n, 1)$ の標準 Whittaker 加群の組成列について, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無し, 1722 (2010), 146-153

- (3) Forrester, Peter J; Ito, Masahiko: Difference system for Selberg correlation integrals, *J. Phys. A: Math. Theor.* 査読あり, vol 43 no 17 (2010), 175202

- (4) Aomoto, Kazuhiko; Ito, Masahiko: A determinant formula for a holonomic q -difference system associated with Jackson integrals of type BC_n , *Advances in Mathematics*, 査読あり, 221 (2009), 1069-1114

- (5) Ito, Masahiko; Sanada, Yukari: On the Sears-Slater basic hypergeometric transformations, *Ramanujan J.* 査読あり, 17 (2008), 245-257

- (6) Aomoto, Kazuhiko; Ito, Masahiko: BC_n -type Jackson integral generalized from Gustafson's C_n -type sum, *J. Difference Equations and Appl.* 査読あり, 14 (2008), 1059-1097

- (7) van Diejen, Jan Felipe; Ito, Masahiko: Difference Equations and Pieri Formulas for G_2 Type Macdonald Polynomials and Integrability, *Lett. Math. Phys.* 査読あり, 86 (2008), 229-248

[学会発表] (計 20 件)

- (1) Taniguchi, Kenji: Composition series of the standard Whittaker (g, K) -modules, 研究集会「半単純 Lie 群上の球関数」, 2011年3月19日, 東京大学, および The 10-th Workshop on Nilpotent Orbits and Representation Theory, 2011年2月22日, 九州大学

- (2) 伊藤雅彦: ワイル群不変なジャクソン積分の q 差分方程式, 岡山大学談話会, 2010年12月23日, 岡山大学, および研究集会「微分方程式の総合的研究」2010年12月18日, 京都大学

- (3) 伊藤雅彦: BC_n 型 q 超幾何関数の三項間隣接関係式とその応用, 日本数学会秋季総合分科会無限可積分系セッション, 2010年9月25日, 名古屋大学, および研究集会「BC系とAGT予想の周辺」2010年9月11日, 東京大学, および神戸可積分系セミナー, 2010年4月28日, 神戸大学, および青山数理セミナー, 2010年4月21日, 青山学院大学
- (4) 谷口健二: Discrete series Whittaker functions on $\text{Spin}(2n, 2)$, AGU Lectures on Representation Theory, 2009年10月22日, 青山学院大学
- (5) 伊藤雅彦: セルバーグ型超幾何関数の隣接関係式と補間公式, 日本数学会秋季総合分科会, 2009年9月24日, 大阪大学
- (6) 谷口健二: Whittaker 関数の計算に現れた高階 Horn 超幾何方程式, 2008年度表現論ワークショップ, 2008年12月25日, とりぎん文化会館

6. 研究組織

(1) 研究代表者

谷口 健二 (TANIGUCHI KENJI)
青山学院大学・理工学部・准教授
研究者番号: 20306492

(3) 連携研究者

小池 和彦 (KOIKE KAZUHIKO)
青山学院大学・社会情報学部・教授
(平成20年度～平成22年度)
研究者番号: 70146306
(平成19年度研究分担者)

伊藤 雅彦 (ITO MASAHIKO)
東京電機大学・未来科学部・准教授
(平成20年度～平成22年度)
研究者番号: 30348461
(平成19年度研究分担者)