様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21 年 6 月 4 日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007 年度〜2008 年度
課題番号：19540227
研究課題名（和文）「Ｓａａｒｉのホモグラフィック予想」の証明と三体８の字解の研究

研究課題名（英文）Proof of the Saari’s homographic conjecture and research of the figure-eight solution

研究代表者 藤原　俊朗（FUJIWARA TOSHIAKI）
北里大学　一般教育部　教授
研究者番号：00173493

研究成果の概要：(1) Saari のホモグラフィック予想については，平面上の多粒子系の運動を，回転運動，サイズの変動，形の変動の３つに一意的に分解することに成功した．それを用いて，ほとんどの場合について，この予想が成立することを示した．
三体８の字解の研究では，(2) ４次式で表される曲線では，解を表すことができないこと，(3) 軌道の形が決まれば，その運動も決まることを示した．その中で，曲線と，三点の重心となるべき位置が指定されたとき，曲線上の三点を見つける作図法を見つけた．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2008 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,800,000	540,000	2,340,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：応用数学，数理物理，天文，解析学，代数学

１．研究開始当初の背景

(1) Saari のホモグラフィック予想（慣性モーメント $I=\sum_{i=1,2,\ldots,N} m_i r_i^2$ とポテンシャル $V=\sum_{i<j} m_i m_j / r_{ij}$ から作られる無次元量 $\mu = IV^2$ が一定な運動は，N 体の相対的な配置が変わらず，回転やサイズが変動するだけの運動しかない）については，システムの大きさの指標である慣性モーメント I が一定な三体問題に対しての証明が Moeckel によって与えられていたが，I が変動する場合については，証明がなかった．

(2) 三体８の字解は，Moore，Chenciner，Montgomery によって発見された三体問題の解で，８の字の形をした固定された軌道の上を等質量の三体が追いかけっこをするものである．これについては，特殊なポテンシャルの下での解が，ベルヌーイのレムニスケー

ト（４次曲線 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ ）の上に乗ることが筆者らによって示されていた．また，Newton ポテンシャルの下での解が４次曲線上にないことは，Simo の数値計算で示されていた．しかし，一般の斉次ポテンシャルの下での運動が４次曲線の上に乗るかどうかは不明であったし，数値計算によらず，厳密な証明が出来るかどうかは，不明であった．

(3) また，筆者らは 2003 年に，「三接線定理：角運動量がゼロの三体運動に於いては，三点から軌道に引いた三接線は常に一点でる」を発見していた．三体８の字解の角運動量はゼロなので，この定理の例となる．図１．これは８の字解の形に強い制限を与える．

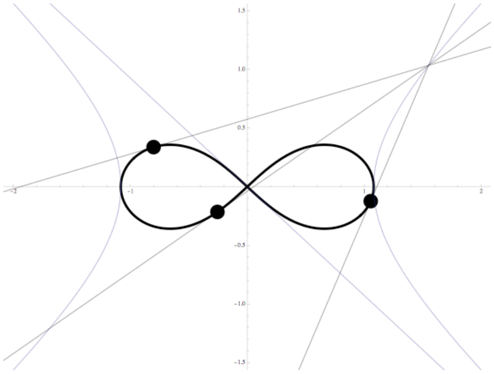

図１．三接線定理の三体８の字解への応用：三質点から軌道に引いた三接線は常に一点で交わる．

我々は，８の字解の軌道の形さえわかれば，解も自然に導かれると予想していた．すなわち，ちょうど 400 年前に Kepler が二体問題において示したのと同じように，三体問題に於いても軌道の形が決まれば運動が定まるのではないかと期待していた．実際，筆者は，共同研究者である福田，尾崎らとともに，ベルヌーイのレムにスケート上に「自然な」運動が定まることを示していた．しかし，それが一意的であるかどうか，一般の８の字の形をした曲線について，一意的に運動が定まるかどうかを示すことはできないでいた．

２．研究の目的

(1) このような状況のもとで研究を始めたので，Saari のホモグラフィック予想の証明では，まずは等質量三体の場合について証明することを，当初の目的とした．しかし，その場合でも，できるだけ一般論を構築することを心がけた．

(2) 一方，８の字解の研究では，斉次ポテンシャルの下での解が，４次曲線に乗らないことを代数的に証明することを目的とした．

(3) また，曲線を決めたら運動が決まるかどうかについては，まずは素性のよくわかっているベルヌーイのレムニスケート（４次曲線）について明らかにすることを当初の目的とした．

重要なポイントは，曲線を与えたとき三体の配置がユニークに決まるかどうかである．より具体的には，曲線上の一点を決めたとき，残りの二点を決める方法を見いだすことが目標であった．図２．

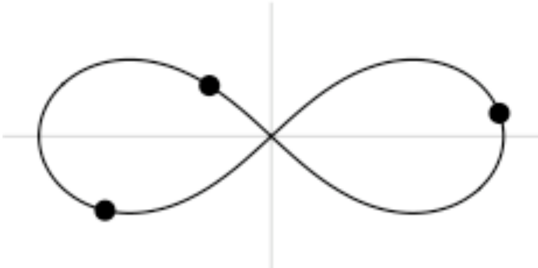

図２．三体８の字解のスナップショット：一点を定めたとき，他の二点の位置を見つける方法はあるか？

３．研究の方法

(1) Saari のホモグラフィック予想の証明に於いては，まずは，N 体の一般の質量の場合について考察し，一般論で行けるところまで行くこととした．N 体の運動を回転運動，サイズの変動，形の変動に３つに一意的に分解する方法を見つけることが必要であった．予想を証明するには，運動をこのように３つの要素に一意的に分解した上で，ホモグラフィック予想の仮定を満たす運動には，形の変動の自由度は残っていないことを示せば良い．

(2) 斉次ポテンシャルの下での三体８の字解が４次曲線の上に乗らないことを示すために，まず我々は，可能な４次曲線が非常に限られていることを示そうとした．この運動の角運動量がゼロであることの帰結として，筆者らが見いだした「三接線定理」を満たす必要があるが，この定理は，軌道の形に非常に強い制限を与えるからである．

次に，その可能な曲線群の中で，斉次ポテンシャル下での８の字解を乗せることが可能であるかどうかを詳しく吟味する．

(3) さて，軌道の形を決めたら運動が決まるかどうかについて，研究を始めた当初は，明確な方法を持っていなかった．まずは，素性のよくわかっているベルヌーイのレムニスケートで，Mathematica 等を用いて数値計算で何がどうなっているのかあたってみようというくらいしか方法を思いつかなかった．

４．研究成果

(1) Saari のホモグラフィック予想について，まずは，一般の質量を持ったＮ体の運動を上記の３つの成分に一意的に分解することに成功した．これは，多くの人たちが成し遂げられなかったことで，私と，Diacu, Perez-Chavela, Santoprete が初めて成し遂げたことである．

次に我々は，この分解を使って，ホモグラフィック予想の証明に取りかかった．我々は，ホモグラフィック予想の仮定が満たされる場合については，変形の自由度に与えられるエネルギーが，定数を慣性モーメントの２乗で割ったものであることを一般的に示すことができた．

しかし，その定数がゼロである，つまり，許される運動は，回転運動とサイズの変動だけであることまでは示すことができなかった．

そこで我々は，問題を三体問題に絞り，その定数がゼロでない場合，すなわち，形の変動が起きる場合の運動が運動方程式と両立するための条件を書き下し，その条件式を満たす解がないことを示そうとした．その条件式を明示的に書き下すことには成功したが，それは非常に複雑な等式で，それが全く解を持たないという証明をすることはできなかった．だが，条件式を数値的に計算してみると，確かにそれを満たす解はない．

そこでさらに我々は，問題を等質量三体問題に絞って，やっといくつかの意味のある結論を得ることができた．すなわち，等質量三体問題に於いては，非常に多くの場合についてSaari のホモグラフィック予想は真である．しかし，例外的な場合を完全に排除することはついに出来なかった．

これらの結果は，Trans. Amer. Math. Soc. に掲載された． また，国際会議 Equadiff 07 で発表した．

(2) まず我々は，４次曲線の中で三接線定理を満たしうるのは，ベルヌーイのレムニスケート，あるいは，それのサイズを縦横独立に一様に変換したものしかないことを代数的に示した．これは，三接線定理が確かに軌道の形に対して非常に厳しい制限を与えることを示したという点で，大変興味深い結果である．

つぎに，これらのレムニスケートの仲間の上で，斉次ポテンシャル下の運動が可能であるかをどうかを Mathematica を使って，代数的に調べ，それが不可能であることを示した．ポテンシャルが斉次であるということが，問題を非常に簡単にする．

これらの結果は，国際会議 Hamsys2008 で発表した．

(3) ８の字解の軌道の形が決まったら，運動が決まるかどうかという問題は，肯定的に解決した．これは共同研究者の尾崎の指摘によって問題の風景がガラリと変わったことによる．尾崎は，軌道の形そのものをコンパスや定規の代わりに使って，三体の配置が幾何学的に決められることを示した．すなわち，三体のうち一つの質量の位置を定めると，他の二質量の位置が幾何学的に定められるというものである．尾崎，福田とともに私は，これを定理の形にまとめた． すなわち,『三点作図定理：曲線が原点対称であれば，その上に与えられた一点 q_3 について, 同じ曲線上の二点で $q_1+q_2+q_3=0$ を満たすものは，元の曲線と, それを q_3 が原点に重なるように平行移動した曲線との交点で与えられる』．これは円については明らかである．図３参照．

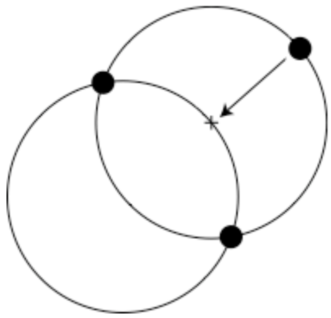

図３．三点作図定理の円への応用：円周上の，重心が原点にある三点．一点（黒丸）が中心に重なるように平行移動した円と，もとの円との交点が，求める二点（黒丸）．

上記の定理が点対称な図形について述べているのは，我々の主な興味が８の字，すなわち点対称な図形にあるからである．実際のところ,「三点作図定理」は，一般の曲線や，質量の異なる（しかし，どの質量もゼロではないではない）三体の位置を見つける問題に拡張できる．

我々は「三点作図定理」を使って，原点対称な凸曲線が与えられたとき，その上の重心の位置が原点にあり角運動量がゼロな運動は，一意的に決定されることを示した．

特に，その曲線が楕円の場合には，その運動が調和振動子のハミルトニアンによって記述されることを示した．

さらに，我々の最も興味がある８の字軌道については，その曲線がいくつかの条件を満たせば（三体８の字解がそれらの条件を満たしていることは数値的にわかっている),「三体作図定理」によって，可能な三点の「動き」は二通りしかない．図４参照．そのうち一点を動かした時の動きが，角運動量一定の「運動」と見なせるものは一通りしかないことも示した．

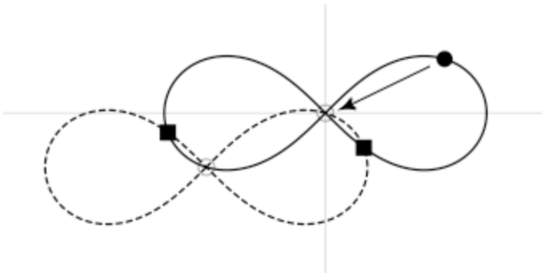

図４．三点作図定理の８の字形の曲線への応用：８の字曲線上の，重心が原点にある三点．一点（黒丸）を与えたとき，その点が原点に重なるように平行移動したもの（点線の８の字）と，もとの曲線（実線の８の字）との交点が，求める二点（黒四角）．この場合，白丸で示した二点も交点ではあるが，黒丸を動かした時の動きが「運動」とは見なせない．

　これらの結果は，現在，論文にまとめて投稿準備を進めているところである．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 1 件）
1) Florlin Diacu, Toshiaki Fujiwara, Ernesto Perez-Chavela, Manuele Santoprete,
"Saari's Homographic Conjecture of the Thtree-Body Problem"
Transactions of the American Mathematical Society, 査読有,
vol. 360-12, 2008, pp6447--6473.

〔学会発表〕（計 3 件）
1) 尾崎浩司，福田宏，藤原俊朗，
「与えられた曲線上の三体コレオグラフィー」, 第 41 回天体力学 N 体力学研究会, 2009 年 3 月 14 日，国立天文台，東京三鷹．

2) Toshiaki Fujiwara,
"Quartic curve does not support the figure-eight solution under any homogeneous potential",
Hamsys2008, 9 July 2008, Guanajuato, Mexico.

3) Toshiaki Fujiwara,
"Saari's homographic conjecture"
Equadiff 07, 10 August 2007, Vienna, Austria

６．研究組織
(1)研究代表者　藤原俊朗
(2)研究分担者　なし
(3)連携研究者　なし