

機関番号：32686

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2007年度～2010年度

課題番号：19540228

研究課題名(和文)

古典可積分系と量子可積分系の接点の探求

研究課題名(英文)

Research on a point of contact between classical and quantum integrable systems

研究代表者

笥 三郎 (KAKEI SABURO)

立教大学・理学部・教授

研究者番号：60318798

研究成果の概要(和文)：

可積分系の研究は、大別すれば「古典可積分系」、「量子可積分系」の2つに分類できる。両者には深い結びつきがあることを、これまでの研究は示唆している。本研究では、特に(1)行列積分とパンルヴェ方程式 (2)離散可積分系とヤン・バクスター写像 という2つのテーマを中心に研究を行い、それぞれについて独自の定式化を導入し、それをもとに成果が得られた。また、特殊関数論的な観点からの研究もあわせて行い、いくつかの成果が得られた。

研究成果の概要(英文)：

Research on integrable systems may be divided into two categories: “classical integrable systems” and “quantum integrable systems”. Preceding results suggest the deep relationship between these categories. We devote our attention mainly to two topics: (1) matrix integral solutions to Painleve equations, (2) discrete integrable systems and Yang-Baxter maps. We introduced new formulation for these two topics and obtained several new results. Furthermore, we have carried out research into special functions and obtained several results.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	900,000	270,000	1,170,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：可積分系

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：ソリトン、パンルヴェ方程式、ヤン・バクスター写像、shifted Jack 多項式

1. 研究開始当初の背景

可積分系の研究は、大別すれば「古典可積分系」、「量子可積分系」の2つに分類できる。量子可積分系は、対応する古典系を正準量子化したものであるため、両者はこの意味では初めから関係付けられている。しかし、両者にはそれ以上の結びつきがあることを、これまでの研究は示唆している。そのような例と

して、本研究では次の2つに特に着目した：

- (1) 量子可積分系の相関関数が、古典可積分系(特にパンルヴェ方程式)の特殊解を与えること。
- (2) 古典可積分系の超離散化から、組合せ論的 R 行列が得られること。

これらを始めとした、可積分系における(拡張された意味での)「量子古典対応」が存在

しているということが、本研究の着想に至った背景である。

2. 研究の目的

可積分系に現れる「量子古典対応」を探究することを通して、新たな数学的構造を見出すことを目的として研究を行った。例えばヤン・バクスター方程式のように、古典系、量子系の双方に現れる概念を通して、両者を貫く普遍的な視点が得られれば、今後に向けて更なる発展が期待できる。また、そうすることを通して、従来の可積分系理論の拡張を行い、さらに新たな視点を与えることも目的とした。

3. 研究の方法

中心となる研究手法は、ソリトン理論における KP 階層の理論、およびその拡張である。特にパンルヴェ方程式を研究する際に、従来の KP 階層のみではなく、そこに“(反)自己双対ヤン・ミルズ的時間発展”を付加した階層である「AKNS-ASDYM 階層」という、代表者らによって導入されたものを積極的に用いる。また、KP 階層に対する離散的な時間発展も導入し、それを利用する。さらに、可積分系に現れるワイル群、ヘッケ環などの代数構造にも注目し、その構造を積極的に活用することとした。特にヘッケ環は、ある種の対称多項式を記述する際に有用であることが知られており、本研究でも qKZ 方程式の多項式解を理解する上での重要な手法を与える。

4. 研究成果

研究成果としては、大別して3つのテーマでの成果が得られた。

- ・古典ソリトン階層とパンルヴェ方程式
- ・離散ソリトン系からのヤン・バクスター写像の構成
- ・特殊関数とその応用

以下で、これら3つのテーマに関する成果を順に述べていく。

- (1) 古典ソリトン系である KP 階層と、その多成分化から出発すると、相似簡約の結果としてパンルヴェ方程式が得られることは以前の我々の研究等から知られていた。今回は、出発点としてトロイダル対称性に対応する拡張である “AKNS-ASDYM 階層” から出発することで、一つのソリトン階層からパンルヴェ II ~ VI を統一的に扱うという枠組みを見出した。この定式化により、行列積分との関係も明確になる(論文は現在準備中)。
- (2) 双線形形式での KP 階層の離散化は、伊達・神保・三輪の研究で基本的な枠組みは定式化されていた。今回はそこから出発し、新たな定式化を持ちこむことで、ヤン・バクスター方程式を満たす有理写

像を系統的に構成する手法を与えた。また、BKP 階層から出発することで、新たなヤン・バクスター写像の例を与えた。BKP 階層から構成したヤン・バクスター写像が、表現論的にどのような意味を持つかは現時点では明らかにできていない。また、連携研究者の斉藤らによる「Mirkovic-Vilonen 多面体」の研究に現れる “トロピカル・ブリュッカー関係式” のような構造と、離散 KP 階層との関係についても、現時点では表面的な対応関係にとどまっており、深い理解を得ることは今後に向けての重要な課題であると言える。

- (3) 特殊関数論的な研究も行い、いくつかの成果を得た。以下に、得られた成果を列挙する。

- ① shifted Jack 多項式と呼ばれる多項式の族については、退化2重アフィンヘッケ代数との関係を通して、有理型 qKZ 方程式の解の構成に利用できることを発見した。この結果はルート系としては A 型に対応しており、他の型に対する拡張を考察することは、今後の課題である。
- ② 超幾何関数に関して、不変量(保存量)が超幾何積分で表される差分方程式を、系統的に構成する方法を与えた。
- ③ q -超幾何関数に関連して、遷移確率が q -超幾何関数で明示的に表されるような、格子上的離散確率モデルを構成した。
- ④ テータ関数とその超離散化(トロピカル化)を利用して、周期性を持つ離散系を構成することも試みた。我々の手法を用いれば、周期性を持つ超離散系からの逆超離散化として有理写像が構成されるが、逆超離散化の結果は必ずしも周期性を持たない。周期性がいつ保たれるかを解明することは今後の課題である。この題材に関連して現れる「ソモス数列」は、整数論的な観点からも関心を持たれており、その方面への発展が期待できる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計12件)

- ① 難波寛, 箕三郎, Max-plus 再帰方程式の逆超離散化, 九州大学応用力学研究所 研究集会報告 22A0-S8 (2011) 248-253 [査読無]
- ② H. Kondo and Y. Saito, Indecomposable

decomposition of tensor products of modules over the restricted quantum universal enveloping algebra associated to sl_2 , J. Alg. 330 (2011) 103-129 [査読有]

- ③ □ S. Kakei, J.J.C. Nimmo, R. Willox, Yang-Baxter maps from the discrete BKP equation, SIGMA (Integrability and Geometry : Methods and Applications) 6 (2010) 028 [査読有]
- ④ □ 篁三郎, J.J.C. Nimmo, and R. Willox, 離散 BKP 方程式と Yang-Baxter 写像, 九州大学応用力学研究所研究集会報告 21ME-S7 (2010), 214-219 [査読無]
- ⑤ □ Y. Saito and M. Shiota, Double affine Hecke algebras and elliptic Hecke algebras, Progress in Math. 284, Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups (2010) 297-312 [査読有]
- ⑥ □ S. Kakei, M. Nishizawa, Y. Saito, Y. Takeyama, The Rational qKZ Equation and Shifted Non-Symmetric Jack Polynomials, SIGMA (Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications) 5 (2009) 010 [査読有]
- ⑦ □ S. Kakei, J. J. C. Nimmo, R. Willox: "Yang-Baxter Maps and the Discrete KP Hierarchy" Glasgow Mathematical Journal 51 巻 0A 号 (2009) 107-119 [査読有]
- ⑧ □ 篁三郎, 菊地哲也, AKNS-ASDYM 階層とパンルヴェ方程式, 京都大学数理解析研究所講究録 1662 (2009), 195-210 [査読無]
- ⑨ □ 篁三郎, R. Willox, J.J.C. Nimmo, Yang-Baxter maps from the discrete KP hierarchy, 京都大学数理解析研究所講究録 1650 (2009), 162-172 [査読無]
- ⑩ □ Y. Saito and M. Shiota, On Hecke algebras associated with elliptic root systems and the double affine Hecke algebras, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 45 (2009), 845-905 [査読有]
- ⑪ □ 神武史, 篁三郎: "超幾何関数で表される不変量を持つ差分方程式" 日本応用数理学会論文誌 17 巻 4 号 (2007) 455-462 [査読有]
- ⑫ □ 何健志, 篁三郎, 北根靖史: "離散確率過程と q-超幾何関数" 日本応用数理学会論文誌 17 巻 4 号 (2007) 463-468 [査読有]

[学会発表] (計 18 件)

- ① □ 篁三郎, From discrete KP to Yang-Baxter maps, GCOE conference:

Algebraic and geometric aspects of discrete integrable systems, 2010 年 12 月 14 日, 東京大学大学院数理科学研究科

- ② □ 斉藤義久, Bernstein-Zelevinsky data and the crystal basis of U_q in type $A_{n-1}^{(1)}$, 組合せ論的表現論とその応用, 2010 年 10 月, 京都大学
- ③ □ 難波寛, 篁三郎, Max-plus 再帰方程式の逆超離散化, 非線形波動研究の新たな展開 -現象とモデル化-, 2010 年 10 月 29 日, 九州大学応用力学研究所
- ④ □ 篁三郎, Construction of Yang-Baxter maps from discrete KP, Satellite conference of the ICM 2010, Integrable Systems and Geometry, 2010 年 8 月 16 日, Pondicherry 大学 (インド)
- ⑤ □ 斉藤義久, Mirkovic-Vilonen polytopes and quiver construction of crystal basis in type A, Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups '10, 2010 年 8 月, 名古屋大学
- ⑥ □ 篁三郎, J.J.C. Nimmo, R. Willox, 離散 BKP 方程式と Yang-Baxter 写像, 日本数学会 2010 年度年会, 2010 年 3 月 26 日, 慶応義塾大学
- ⑦ □ 斉藤義久, Crystals, MV-polytopes and 'tropical flag varieties', トロピカル幾何と超離散系の新展開, 2010 年 3 月, 京都大学大学院工学研究科
- ⑧ □ 篁三郎, 離散可積分系入門, 九州大学産業技術数理研究センターワークショップ "離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル", 2010 年 2 月 22 日, 九州大学
- ⑨ □ 篁三郎, J.J.C. Nimmo, R. Willox, 離散 BKP 方程式と Yang-Baxter 写像, 研究集会: 非線形波動研究の現状と将来 -一次の 10 年への展望, 2009 年 11 月 21 日, 九州大学応用力学研究所
- ⑩ □ 篁三郎, 西澤道知, 斉藤義久, 竹山美宏, The rational qKZ equation and shifted non-symmetric Jack polynomials, 日本数学会 2009 年度年会, 2009 年 3 月, 東京大学
- ⑪ □ 斉藤義久, Hecke 代数の多項式表現について, 第 53 回代数学シンポジウム, 2008 年 8 月, 盛岡駅前アイーナ
- ⑫ □ 篁三郎, J.J.C. Nimmo, R. Willox, 離散 KP 階層と Yang-Baxter map, 日本数学会 2008 年度年会, 2008 年 3 月 23 日, 近畿大学
- ⑬ □ 篁三郎, 菊地哲也, NLS-AKNS 階層とパンルヴェ方程式, 日本数学会 2008 年度年会, 2008 年 3 月 23 日, 近畿大学
- ⑭ □ 菊地哲也, 戸田階層とパンルヴェ方程式 "2007 年度表現論シンポジウム, 2007 年 11 月 14 日, 休暇村讃岐五色台

- ⑮ □笥三郎, Similarity solutions of NLS-SDYM hierarchy and matrix integrals, DMHF2007: COE Conference on the Development of Dynamic Mathematics with High Functionality, 2007年10月2日, 福岡リーセントホテル
- ⑯ □笥三郎, J. J. C. Nimmo, R. Willox, Yang-Baxter maps from the discrete KP hierarchy, 研究集会: 可積分数理の新潮流, 2007年8月22日, 京都大学数理解析研究所
- ⑰ □菊地哲也, ソリトン方程式の保存則と相似簡約, 2007 函数方程式論サマーセミナー, 2007年8月7日, ビレッジ安曇野
- ⑱ □笥三郎, J. J. C. Nimmo, R. Willox, Local Darboux transformations and geometric crystals, International workshop "ISLAND 3" (Integrable Systems: Linear And Nonlinear Dynamics), 2007年7月4日, Islay, Scotland

[その他]

ホームページ等

<http://www.rkmath.rikkyo.ac.jp/~kakei/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

笥三郎 (KAKEI SABURO)

立教大学・理学部・教授

研究者番号: 60318798

(2) 研究分担者

菊地 哲也 (KIKUCHI TETSUYA)

東京大学・大学院数理科学研究科・研究拠点形成特任研究員

研究者番号: 00374900

(2009→2010: 連携研究者)

斉藤 義久 (SAITO YOSHIHISA)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号: 20294522

(2008→2010: 連携研究者)

西澤 道知 (NISHIZAWA MICHITOMO)

弘前大学・教育学部・准教授

研究者番号: 20318801

(2008→2010: 連携研究者)

(3) 連携研究者