

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2008

課題番号：19540231

研究課題名 (和文) 楕円量子可積分系の相関関数と形状因子

研究課題名 (英文) Correlation functions and form factors of elliptic integrable systems

研究代表者

桑野 泰宏 (Quano Yas-Hiro)

鈴鹿医療科学大学・医用工学部・教授

研究者番号：80309038

研究成果の概要：本研究では、楕円量子可積分系のうち (Z/nZ) 対称模型の相関関数を系統的に求めるための枠組みについて考察・研究した。 (Z/nZ) 対称模型と双対な A 型非制限面模型の物理量を変換する際に必要となるテール作用素と呼ばれる非局所作用素のボゾン表示を構成し、 (Z/nZ) 対称模型の相関関数の積分表示を書き下した。さらに、相関関数のうち最も簡単な 1 点関数について、積分計算を実行し自発電化を求めた。こうして得られた自発電化が、1993 年に桑野自身が相関関数のみならず差分方程式を解いて得た無限積表示に一致することをたしかめた。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,900,000	570,000	2,470,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：大域解析学

キーワード：楕円量子可積分系

1. 研究開始当初の背景

可解格子模型のマスター方程式である、Yang-Baxter 方程式の解には、楕円関数解—三角関数解—有理関数解という階層が存在する。このうち、三角関数解および有理関数解には、アフィン量子群やダブル Yangian の表現論を用いた代数解析的な方法論が確立している。Yang-Baxter 方程式の楕円関数解で記述される楕円量子可積分系についても同様の方法論の確立が待たれるが、現在のところ得られている結果は少なく断片的である。

(1) 頂点・面変換法による 8 頂点模型の相関関数および形状因子の積分表示がそれぞれ Lashkevich—Pugai, Lashkevich により与えられている。

(2) 桑野はブートストラップ法により、8 頂点模型の相関関数の新しい積分表示を構成した。

(3) 白石は、無反射点系列における 8 頂点模型の頂点作用素を、変形 Virasoro 代数の表

現論から導出した。

これらの断片的な結果を超えて、楕円量子可積分系の相関関数や形状因子を系統的に与える方法論の確立が必要とされたのが研究開始当初の状況であった。

2. 研究の目的

(1) 本研究の目的は、楕円量子可積分系の代数解析的な構造を解明し、その無限次元の対称性についての理解を深めることである。具体的には、楕円量子可積分系の無限次元の対称性を用いて、その相関関数や形状因子を系統的に求めることを目的とする。

(2) 関連して、頂点模型に関わる楕円量子群の構成および表現論、

(3) 量子 Knizhnik-Zamolodchikov 方程式の解の構成、

(4) 量子差分系との関連、

などを考察することが本研究の目的である。

3. 研究の方法

(1) 8 頂点模型の高ランク版である (Z/nZ) 対称模型の相関関数を構成するために、 (Z/nZ) 対称模型と双対な A 型非制限面模型との頂点・面変換法を用い、さらには A 型非制限面模型における頂点作用素のボソン表示を用いた。また、研究を通じて、総じてボソン化の方法を用いた。

(2) 楕円代数の構成に当たっては、Virasoro 代数および W_N 代数の楕円変形に着目して研究した。

(3) 量子 Knizhnik-Zamolodchikov 方程式の解の構成においては、ある種の平面代数曲線の多変数シグマ関数の代数的積分表示を用いた。

(4) 可積分系の差分量子化の具体例として、神保と坂井による差分パンルヴェ VI 型方程式について考察し、Faddeev-Volkov らによる量子差分戸田場系との類似に注目して研究した。

4. 研究成果

(1) 桑野は、8 頂点模型の高ランク版である (Z/nZ) 対称模型の相関関数を求めるための枠組みを構成した。具体的には、 (Z/nZ) 対称模型と双対な A 型非制限面模型の物理量を (Z/nZ) 対称模型の物理量に読み替える際に必要となるテール作用素と呼ばれる非局所作用素のボソン表示を求めた。既に浅井らによって求められていた I 型頂点作用素のボソン表示、および Fan らにより構成され、桑野により再構成された A 型非制限面模型の角転送ハミルトニアン²のボソン表示と合わせ、 (Z/nZ) 対称模型の相関関数を表す積分表示を書き下すことに成功した。さらに、相関関数のうち最も簡単な 1 点関数について、積分計算を実行し自発電化を求めた。こうして得られた自発電化が、1993 年に桑野自身が相関関数のみならず差分方程式を解いて得た無限積表示に一致することをたしかめた。この一致は、ボソン化構成法が正しいことの証左となる。

(2) 白石は、楕円代数 $U_{qp}(sl_2)$ ハットのレベル k 表現に関する運動の積分を構成した。また、Virasoro および W_N 代数の楕円変形に対する運動の積分も構成した。

(3) 中屋敷は、代数曲線から定義される多変数のシグマ関数について研究し、そのべき級数展開の基本性質を証明した。また、量子アフィン代数の自由場表示による量子 Knizhnik-Zamolodchikov 方程式の解の研究を行った。具体的には、 $sl(2)$ のアフィン量子群の頂点作用素の行列要素の積分表示を従来のものより簡単な形で求めた。

(4) 長谷川は、神保と坂井による差分パンルヴェ VI 型方程式について、その量子化を量子群の構造の下で考察した。とくに Faddeev-Volkov らによる量子差分戸田場系との類似に注目し、その非自励化の準周期簡約として量子離散ガルニエ系を得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① Yas-Hiro Quano, Vertex operator approach for correlation functions of Belavin's (Z/nZ) -symmetric model, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **42** 165211, pp1-20, 2009, 査読有, [arXiv:0810.4220](https://arxiv.org/abs/0810.4220).
- ② Takeo Kojima and Jun'ichi Shiraishi, The integrals of motion for the elliptic deformation of the Virasoro and W_N -algebra, to appear in Journal of Nonlinear Analysis, 2009, 査読有, [arXiv:0902.1019](https://arxiv.org/abs/0902.1019).
- ③ Takeo Kojima and Jun'ichi Shiraishi, A remark on the integrals of motion associated with level k realization of the elliptic algebra $U_{qp}(\widehat{sl}_2)$, to appear in Journal of Geometry and Symmetry in Physics, 2009, 査読有, [arXiv:0810.2881](https://arxiv.org/abs/0810.2881).
- ④ Kazunori Kuroki and Atsushi Nakayashiki, Free field approach to solutions of the quantum Knizhnik-Zamolodchikov equations, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, **4** 049, pp1-13, 2008, 査読有, [arXiv:0802.1776](https://arxiv.org/abs/0802.1776).
- ⑤ Koji Cho and Atsushi Nakayashiki, Differential structure of Abelian functions, International Journal of Mathematics, **19** 145-171, 2008, 査読有, [arXiv:math/0604267](https://arxiv.org/abs/math/0604267).

[学会発表] (計 10 件)

- ① 白石潤一, 柳田伸太郎, Feigin-Odesskii 代数と Macdonald 多項式, 日本数学会 2009 年度年会, 2009 年 3 月 29 日, 東京大学大学院数理科学研究科.
- ② 中屋敷厚, Modular invariant tau functions of the KP-hierarchy, 研究会「テータ関数と可積分系」, 九州大学, 2008 年 12 月 21 日.
- ③ 白石潤一, Macdonald 多項式と可積分系, 日本数学会 2008 年度秋季総合分科会特別講演, 2008 年 9 月 25 日, 東京工業大学.
- ④ 中屋敷厚, Expressions of theta functions in terms of prime form and their applications, 研究セミナー「Concrete theory of Abelian functions and its applications」, 2008 年 7 月 20 日, 岩手大学.
- ⑤ 星野歩, 白石潤一, 変形 W 代数と Macdonald 多項式の明示公式, 日本数学会 2008 年度年会, 2008 年 3 月 23 日, 近畿大学理工学部.
- ⑥ 桑野泰宏, Z/nZ 対称模型の相関関数についてのいくつかの補足, 日本数学会 2008 年度年会, 2008 年 3 月 23 日, 近畿大学理工学部.
- ⑦ 桑野泰宏, Belavin の Z_n 対称模型の相関関数について, 日本物理学会第 63 回年次大会, 2008 年 3 月 23 日, 近畿大学理工学部.
- ⑧ 野海正俊, 白石潤一, Koornwinder の q 差分作用素の核関数とその応用, 日本数学会 2007 年度秋季総合分科会, 2007 年 9 月 21 日, 東北大学.
- ⑨ 中屋敷厚, 多変数シグマ関数の代数的表示, 日本数学会秋季総合分科会, 2007 年 9 月 21 日, 東北大学.
- ⑩ 長谷川浩司, Quantization of discrete Painleve equations, 九州可積分系セミナー, Japan-Korea workshop on algebra and combinatorics, 2007 年 9 月 15 日, 九州大学数理学研究院.

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕

（1）集中講義

- ① 長谷川浩司，「量子離散可積分系入門」，東京大学大学院数理科学研究科，2008年12月17-21日。
- ② 中屋敷厚，「アーベル関数の微分構造—多変数シグマ関数の理論の紹介—」，北海道大学大学院理学研究院，2008年11月4日-7日。

（2）国際会議・ポスター発表

- ① Yas-Hiro Quano，Vertex operator approach for correlation functions of Belavin's (Z/nZ) -symmetric model, Recent Advances in Quantum Integrable Systems, 11-14 September 2007, LAPTH, Annecy-le-Vieux, France.

（3）整数論サマースクール講師

- ① 中屋敷厚，シグマ関数の代数的表示，整数論サマースクール「種数の高い代数曲線と Abel 多様体」，2007年8月24日，大沢温泉，岩手・花巻。

6. 研究組織

(1) 研究代表者

桑野 泰宏 (Quano Yas-Hiro)
鈴鹿医療科学大学・医用工学部・教授
研究者番号：80309038

(2) 研究分担者（2007年度）

中屋敷 厚 (Nakayashiki Atsushi)
九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号：10237056

白石 潤一 (Shiraishi Jun'ichi)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：20272536

長谷川 浩司 (Hasegawa Koji)
東北大学・大学院理学研究科・講師
研究者番号：30208483

(3) 連携研究者（2008年度）

中屋敷 厚 (Nakayashiki Atsushi)
九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号：10237056

白石 潤一 (Shiraishi Jun'ichi)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：20272536

長谷川 浩司 (Hasegawa Koji)
東北大学・大学院理学研究科・講師
研究者番号：30208483