

平成 22 年 6 月 4 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2009

課題番号：19540232

研究課題名 (和文) 非線形強分散系のベンジャミン-フェイル型不安定性の研究

研究課題名 (英文) Study on the instability of Benjamin-Feir type concerned with nonlinear strongly dispersive systems

研究代表者

大宮 眞弓 (OHMIYA MAYUMI)

同志社大学・生命医科学部・教授

研究者番号：50035698

研究成果の概要 (和文) : 代表的な強分散非線系であるサイン-ゴードン方程式に対してフーリエ型 1 次近似解を構成しフロケ理論を用いてベンジャミン-フェイル型不安定性を明らかにした。さらに一般の強分散系における不安定現象を解明する為に、手始めに、KdV 型非線形方程式のような弱分散非線形系に対して第一積分を構成する方法を開発した。さらに、高階定常 KdV 方程式と跡公式の関連を明らかにし、急減少型 Bargmann ポテンシャルや周期的有限帯ポテンシャルが高階定常 KdV 方程式を満たす事を統一的に証明した。同時に、与えられたマイクロ系の分散性を判定するベビー-バスウォーター・スキームと呼ばれる数値低手法を研究した。他方、複雑ネットワーク系の臨界現象のメカニズムを数値的に明らかにした。

研究成果の概要 (英文) : The first order approximate solution of Fourier type is constructed for the Sine-Gordon equation, which is the typical example of strongly dispersive nonlinear system, and its instability of Benjamin-Feir type is clarified by Floquet theory. Furthermore, to clarify the instability phenomena of general strongly dispersive nonlinear system, to begin with, various methods of constructing first integrals have been developed for weakly dispersive nonlinear system such as nonlinear equations of KdV type. Moreover, the relations between the higher order stationary KdV equation and the trace formulas have been clarified, and it is uniformly proved that the rapidly decreasing Bargmann potentials and the periodic finite zonal potentials solve the higher order stationary KdV equations. Simultaneously, to find the dispersive property for the given microscopic system, a numerical method called Baby-Bathwater scheme is studied. On the one hand, mechanism of critical phenomena has been clarified for complex network system by numerical methods.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	900,000	270,000	1,170,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	2,400,000	720,000	3,120,000

研究分野：数学一般

科研費の分科・細目：数理物理学

キーワード：強分散系、定常 KdV 階層、第一積分、跡公式、ソリトン、不安定現象、イジング模型、サイン-ゴードン方程式

1. 研究開始当初の背景

(1) 当初は、ソリトンに代表される非線形分散系の安定現象を研究していたが、物性論の格子欠陥における不安定現象に関連した問題の背景にある、周期係数の微分作用素の不安定帯の問題との関連に気づき、ソリトン理論で成功した逆散乱法と同様な手法で不安定現象が議論できることが予想され、研究を開始した。

(2) 不安定現象は、強分散系には現れるが弱分散系には現れないとされている。しかし、物理的には強分散系、弱分散系の概念は存在し、例えば KdV 方程式は弱分散で非線形シュレディンガー方程式は強分散であると言われるが、数学的にはいまだ完全な形で定式化はなされていない。そのみか、本来、流体現象等の連続系でも実際はミクロな系の巨視的現象なので、ミクロな系を考察した際に分散性や拡散性がどのように現れるかを数値的に考察してみた。それがベビー-バスウオーター・スキームである。

(3) 通常は「非線形現象」とは捉えられていないが、イジング模型に代表される統計力学模型の相転移現象や臨界現象を不安定現象の観点から考察をした。磁化現象ではキュリー温度として観測される不安定現象と、株式市場等のマーケットにおける不安定現象に共通なメカニズムの存在に着目し、格子模型をネットワークに置き換えた 1 次元イジング-シュナイド模型の相転移現象を数値実験で確かめた。さらに、ネットワーク化における構造の変化が時系列として現れるモデルを考察し、スモールワールド現象との関連を考察した。

(4) 不安定現象を研究する中で、不安定性を数値的に正確に定式化するには、保存量を効果的に計算する手法の必要性に気づき、一番基本的な KdV 型方程式について組織的に研究した。従来知られていた微分多項式で著される局所密度と異なった保存量が一連の跡公式から導かれることに気づき、それらを一般化した。

(5) 可積分系の定常問題と対応する線形化作用素の跡公式の実質的な等価性に着目し、

跡公式を組織的に研究し、Novikov の定理を周期的な問題や急減少の問題に限定せずに考察した。それによって無限自由度の可積分系の背景にある定常問題の意味合いが明確に見えてきた。

2. 研究の目的

非線形波動は、GGKM のソリトンと逆散乱法の発見までは、綺麗な理論は存在しない世界と思われていた。ところが、逆に GGKM 以降は、非線形波動は KdV 階層や KP 階層と無限次元リー環との関連を中心に、構造論を中心とする研究に中心を移してしまい、本来の非線形独特の混沌たる現象を忘れた観が強くなっていった。そこで、本研究では、そのような傾向に一石を投ずるべく、非線形波動の不安定現象に焦点を合わせた。特に、ソリトンで威力を發揮したフロケ理論の有効性や、可積分系としての保存量=第一積分を不安定性の量的指標として用いる等、ソリトン理論の古典的手法が不安定現象の解明にも威力を發揮する事を示す事が第一の目的であった。

また、従来は強磁性体の磁化モデルであるイジング模型を、ネットワーク化することにより、臨界現象を非線形性に由来する不安定現象と捉える事により、複雑系科学に新しい視点を導入することももう一つの目的であった。特に、それらの理論を、マーケットの価格形成のメカニズム解明に応用する事により、ネットワーク理論におけるスモールワールド現象との関連を明らかにする事を目的とした。

さらに、波動の不安定性や、ネットワーク化されたイジング模型の不安定現象の背景に、多粒子系の分散性との関連を数値実験で見出した為、ミクロ系の分散性判定のアルゴリズムを開発することを目的とした。

3. 研究の方法

ソリトン理論の古典的手法が不安定現象の解明にも威力を發揮する事を示すには、従来からの解析的手法をそのまま踏襲した。研究成果の項で紹介したサイン-ゴードン方程式に対してはヤコビ楕円関数係数のヒル作用素のスペクトル、特にその第一不安定帯を、我々が開発した Δ 作用素法を用いて計算した。

非線形波動の不安定現象にはあまり数値解析的手法は有効でないと思われていたが、今回ソリトンの数値的構成で威力を發揮した広田差分を用いたところ、想像以上に有効であることが判明した。特に、Benjamin-Feir型不安定性を示す境界において、不安定性の増大が線形である点まで再現できることは、ある意味予想を超える事であった。理由は、残念ながら解明できていないが、ソリトン理論で功を奏した解析的手法とともに数値解析的手法も同様であったと言う事は、不安定現象解明の新たな方向を示唆するものと言えよう。

不安定性の数値的指標の算出の為に、試みに弱分散系のKdV方程式や定常KdV方程式の第一積分を上記の Δ 作用素法で組織的に計算する方法を確立した。他方、現象を見出すには、計算機を用いた数値実験を多用し、フォンノイマンの提唱したシナジーを強力に推し進めた。その際にも、従来のソリトンで威力を發揮した広田差分も多用し、その差分スキームが不安定現象の数値シミュレーションにも極めて有効であることを実証した。

また、ネットワーク化したイジング模型の臨界現象の研究では、主として数値実験を採用した。特に、近年開発されたメルセンヌツイスター法にもとづく長周期の乱数は極めて有効であることが分かった。

4. 研究成果

(1) 今回の研究で対象とした非線形強分散系としてはソリトン方程式としても知られているサイン-ゴードン方程式

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin u$$

であった。これに関してフーリエ型1次近似解を構成することにより、ベンジャミン-フェイル型不安定性の発生する擾動波の波数域を完全に決定した。図1はフーリエ1次近似解の時間発展を示す。振幅が時間とともに指数関数的に増大しているのが分かる。

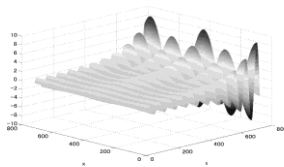


図1. フーリエ型1次近似解の不安定性

(2) サイン-ゴードン方程式を広田差分を用いて差分化することにより、上の(1)で解析した同じ擾動に関し数値実験を行い、広田差分の方法の不安定現象における有効性を実証した。図2はそれを図示したものである。図1と同様の結果を示している。

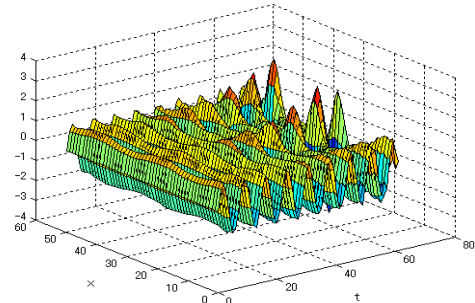


図2. 広田差分による不安定性

(3) 不安定現象の数値的指標、あるいは不安定性の数値的判定の為に第一積分の計算法として、非定常問題に関しては、逆散乱法にもとづく新たな第一積分の系列を発見し、また定常問題に関しては第一積分生成多項式を構成し、全ての包含的第一積分を一度に構成する事に成功した。

(4) 高階定常KdV方程式の第一積分構成の過程で、無反射ポテンシャルや、有限帯ポテンシャルが高次定常KdV方程式を満たす事を、有限型の跡公式から示す事に成功し、従来の急減少型ソリトンと周期的ソリトンを統一的に理解できるようになった。

(5) 他方、マイクロな系が分散性が拡散性かを判定するベビー-バスウォーター・スキームを数値解析的に研究し、マクロな現象である不安定現象やソリトン現象の背景にあるマイクロな現象との関連を明らかにする道を開いた。これらは、マイクロな系を多粒子系の共鳴現象として捉えることの可能性も示唆している。

(6) また、イジング模型に見られる相転移・臨界現象も同じカテゴリーの不安定現象と考え、その本質を探るべく、格子模型だけではなくネットワーク化したイジング模型を考え、その辺の張替え確率が時系列的に変化するモデルを、AR- β モデルとして株式市場の価格形成の新たなモデルとして提唱した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計10件)

- ① Y. Yamamoto, T. Nagase, M. Ohmiya, Appell's lemma and conservation laws of KdV equation, J. Comput. Appl. Math., 233, 1612-1618 (2010) 査読有
- ② T. Nagao, M. Ohmiya, Networked Ising-AR- β model, AIP Proceeding of ICNAAM2009, 224-227 (2009) 査読有
- ③ M. Matsushima, M. Ohmiya, An algebraic

construction of first integrals of the stationary KdV hierarchy, AIP Proceeding of ICNAAM2009, 168 – 172 (2009) 査読有

- ④ 松島正知、大宮眞弓、跡公式と定常 KdV 階層の完全積分可能性、九州大学応用力学研究所研究会報告 21ME-S7、29–34、2009、査読無
- ⑤ 長尾朋徳、大宮眞弓、Networked Ising–Sznajd model and the stock markets、九州大学応用力学研究所研究会報告 20ME-S7、206–210、2009、査読無
- ⑥ 磯野雅文、大宮眞弓、Baby–Bathwater scheme – a bridge between macroscopic and microscopic description –、九州大学応用力学研究所研究会報告 20ME-S7、201–205、2009、査読無
- ⑦ 山本悠、大宮眞弓、結合振動子の同期現象と非線形発展方程式、九州大学応用力学研究所研究会報告 19ME-S2、151–156、2008、査読無
- ⑧ 大宮眞弓、長瀬昭子、Appell の補題と KdV 保存則再訪、九州大学応用力学研究所研究会報告 19ME-S2、6–11、2008、査読無
- ⑨ M. Ohmiya, H. Ohkura, D. Okaue, D. Saitoh, D. Shiba, Benjamin–Feir type instability of Sine–Gordon equation and spectrum of Lamé equation, J. Compu. Appl. Math., 207, 345–351 (2007) 査読有
- ⑩ M. Ohmiya, Y. Yamamoto, On the first integrals of KdV equation and trace formulas of Deift–Trubowitz type, WSEAS, Appl. Math. Sci. Eng., 25–30 (2007) 査読有

[学会発表] (計 8 件)

- ① 松島正知、大宮眞弓、跡公式と定常 KdV 階層の完全積分可能性、九州大学応用力学研究所研究会、2009 年 11 月 20 日、九州大学
- ② T. Nagao, M. Ohmiya, Networked Ising–AR– β model, AIP Proceeding of ICNAAM2009, 224–227 (2009 年 9 月 18 日) ギリシャ、クレタ島レシノム
- ③ M. Matsushima, M. Ohmiya, An algebraic construction of first integrals of the stationary KdV hierarchy, AIP Proceeding of ICNAAM2009, 168 – 172 (2009 年 9 月 18 日) ギリシャ、クレタ島レシノム
- ④ T. Nagao, M. Ohmiya, H. Yoshikawa, Networked Ising–Sznajd Models and the Stock Markets, 2008 SIAM Conference on Financial Math. and Engineering, 2008 年 11 月 21 日, The Heldrich Hotel, New Brunswick, NJ, USA

- ⑤ 長尾朋徳、大宮眞弓、Networked Ising–Sznajd model and the stock markets、九州大学応用力学研究所研究会、2008 年 11 月 7 日、九州大学
- ⑥ 磯野雅文、大宮眞弓、Baby–Bathwater scheme – a bridge between macroscopic and microscopic description –、九州大学応用力学研究所研究会、2008 年 11 月 7 日、九州大学
- ⑦ 山本悠、大宮眞弓、結合振動子の同期現象と非線形発展方程式、九州大学応用力学研究所研究会、2007 年 11 月 8 日、九州大学
- ⑧ 大宮眞弓、長瀬昭子、Appell の補題と KdV 保存則再訪、九州大学応用力学研究所研究会、2007 年 11 月 7 日、九州大学

[図書] (計 1 件)

- ① 大宮眞弓、非線形波動の古典解析、森北出版、2008、251 頁

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大宮 眞弓 (OHMIYA MAYUMI)
同志社大学・生命医科学部・教授
研究者番号：50035698

(2) 研究分担者

無し

(3) 連携研究者

無し