

平成 22 年 6 月 8 日現在

研究種目：基盤研究(G)

研究期間：2007～2009

課題番号：19540257

研究課題名（和文） 非可換幾何学における対称性とその弦理論的起源の研究

研究課題名（英文） Symmetry in Noncommutative Geometry and its String Theory Origin

研究代表者

綿村 哲 (Satoshi Watamura)

東北大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号00201252

研究成果の概要（和文）：弦理論の対称性としてのホップ代数の構造と非自明な背景 B 場が存在する場合の作用素代数の変形の構造が，弦理論の世界面における量子化に我々の提唱した弦理論のホップ代数の捩れ要素による量子化の方法を応用することにより，量子化の場合の作用素代数の変形と背景 B 場による変形が同じレベルで単一の変形として構成できることが明らかになった．このことは，弦理論レベルの一般座標変換の対称性を含むホップ代数が，量子化と背景 B 場による変形で変形された一般座標変換対称性を含む量子群に拡張されることを意味する．

研究成果の概要（英文）：Summary of the results of the research: It became apparent that the structure of the Hopf algebra as a symmetry of the string theory and the structure of the deformation of the operator algebra caused by the existence of the non-trivial B-field background can be unified under the 'twist quantization', which is proposed by us and applied for the formulation of the string world sheet quantization by the twist element of the Hopf algebra, in the way that the deformation of operator algebra occurs due to the quantization and the deformation by B-field background are constructed in the single deformation of the same level. It means that in the string level, the Hopf algebra which contains the diffeomorphism in string theory, is deformed by both quantization and B-field background into the quantum group algebra including the deformed diffeomorphism.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：物理系科学

科研費の分科・細目：物理学・素粒子

キーワード：素粒子理論・数理物理・幾何学・非可換幾何学・弦理論

1. 研究開始当初の背景

超弦理論の真空解として現れる空間の中には，非可換幾何学の範疇にはいるものが現れることは知られている．一方，非可換幾

何学においては，対称性の表現は量子群（ホップ代数）として表現されるのが自然である．そして，このことは場の理論の対称性を，ホップ代数を使うことで自然に非可換

空間上の場の理論に拡張することで、物理的に応用ができることも知られていた。ところが、超弦理論における対称性の構造はそのように捉えられていない。

原因の一つは、弦理論における対称性にいろいろなレベルがあるためである。一つは、世界面上の量子化などに現れる2次元場の理論としての対称性であり、一方で弦の埋め込み空間のローレンツ対称性やその他の対称性でそれらが量子化の後どのように実現されているかは明らかではない。とくにアインシュタインの理論における、一般座標変換のもとでの一般相対性の役割を考えると、弦理論においても一般座標変換の対称性が弦の量子化などにおいてどのように影響を受け変形されるのかを正しく追跡する必要がある。つまり、弦理論における対称性がその量子化とともに、どのようにホップ代数（いわゆる量子群）に拡張され、あらゆる時空（真空）の対称性が記述されるのかを明らかにする必要がある。

2. 研究の目的

弦理論は重力を記述する理論であるので、結果として宇宙の幾何学の理論になっている。弦が量子化された後は、そのような幾何学は一般に非可換幾何学の範疇に入る理論になると考えられている。この研究では、特に非可換幾何学と超弦理論における対称性の構造と、その関係を明らかにすることを目的としている。この重要性は、一般相対論におけるリーマン幾何学と一般相対性の関係が、弦理論と非可換幾何学の対称性との関係と対応すると考えらることで理解できる。この類推で、量子重力において超弦理論が物理的な基盤を与えるならば、非可換幾何学がそれを数学的な幾何学概念を与えることになる。この時、さまざまな対称性の原理、特に弦の埋め込み空間上のローレンツ変換やさらに一般座標変換を、どのようにこの非可換幾何学の枠組みと整合するように取り込んでいけばよいかを解明することがこの研究の目的である。

3. 研究の方法

弦理論の量子化を変形量子化としてとらえることができる。この方法には、弦の埋め込み関数上の汎関数空間でのベクトル場を考え、そのうえで Moyal 的な積を考えることになる。これは、同時に弦の作用素代数に作用するホップ代数のねじれを与えることになる。一方で、この量子化を考えるときに現れるホップ代数は、弦の埋め込み空間の一般座標変換の代数から作ることができるホップ代数と統一的に考えることができる。この二つのホップ代数はさらに独立ではなく、量子化

による変形が、一般座標変換の対称性に影響を及ぼすことがわかる。その影響は、量子化を行う時に導入された、振れ要素による、統一されたホップ代数の振れという形で表現される。このようにして量子化の影響をホップ代数の言葉に翻訳することができる。量子化自身はこのホップ代数の作用するような頂点作用素の作る加群代数の共変性の要請で自動的に実現される。一方、この方法を拡張することで、量子化だけでなくその他の変形がホップ代数の変形にどのように反映するかが分かれば、それらの変形も量子化とともに統一的に扱える。ホップ代数は非可換幾何学における対称性の表現だが、この方法で、超弦理論の対称性と考えることができ、したがってさまざまな対称性のねじれが解析できる。

4. 研究成果

研究の結果、弦理論における一般座標変換の対称性 (Diffeomorphism) を含むホップ代数を弦理論の対称性の基本的な構造ととらえ、それを拡張する形で、頂点作用素の代数に作用するさらに一般化されたホップ代数を弦理論の対称性として定義した。研究方法のところで説明したように、準備として我々は、まず弦の世界面での量子化を変形量子化の形で行い、それを弦の一般座標変換を含むこのホップ代数の変形としてとらえることを提唱し、その方法によって得られる量子化が、経路積分による量子化と等価であることを示した。これを振れ量子化と呼ぶ。これは準備とはいえそれ自体弦理論の量子化に関する新しいアプローチを与えている。

さらに、振れ量子化を踏まえて背景 B 場が存在する場合に、対称性の構造をホップ代数の振れを使って統一的にとらえることに成功した。これは、振れ量子化を構成するために導入したホップ代数を B 場が存在する場合に拡張しそのホップ代数の振れとして量子化を再構成することで可能になる。このように構成することで、 B 場が存在する場合、振れ量子化の方法を使うと、量子化と B 場による変形を同じレベルでシームレスに構成できることが明らかになった。つまり、二つの変形が統一された一つの振れ要素によるものと考えることができ、これによって、2つの変形を区別することなく、単一の変形と考えることが可能になった。結果、 B 場の存在の下での振れたホップ代数が定義される。この振れたホップ

代数は、弦理論で考えている頂点作用素の作る加群に作用するが、この作用の共変性を要求する（つまり弦理論が振れたホップ代数の対称性を持つことを要請する）と、弦理論の量子化と B 場による変形が振れの要素を通じて、頂点作用素の積の変形に反映される。B 場が存在しない時にこれが弦の量子化に等価であることが、振れ量子化の等価性であるが、B 場が存在するときは、このようにして得られた頂点作用素代数の変形は、弦の量子化と B 場による変形を同時に記述するのである。

この方法で得られた統一された変形が、従来の量子化と背景 B 場による変形の両方を含むことを示すために、我々はさらに、ホップ代数の変形を分割する方法を提唱した。これは、ホップ代数の振れを 2 段階に分けて行うため、それぞれの段階の振れ要素がある種の整合性を満たすことを要請される。この要請のもとで、変形を分割する方法はさまざま考えられる。我々は、2 種類の分解を解析したが、そのうちの一つの分解では、それを使えば従来通り量子化と B 場の影響で非可換空間性の現れを分離することができることも明らかにした。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

1. Twist Quantization of String and B Field Background, A. Tsuguhiko, M. Mori, S. Watamura, JHEP 0904 (2009) 117:1-21, 査読有
2. Hopf Algebra Symmetry and String Theory, A. Tsuguhiko, M. Mori, S. Watamura, Prog. of Theor. Phys. 120 (2008) 659-689 査読有
3. 1/N Expansion of the 2D CP^{N-1} Model on Non(anti)commutative Superspace, T. Inami, K. Araki, H. Nakajima, Y. Yamashita, Prog. Theor. Phys. 119(2008)345-350, 査読有
4. Intersecting Solitons, Amoeba and Tropical Geometry, T. Fujimori, M. Nitta, K. Ohta, N. Sakai, M. Yamazaki, Physical Review D78(2008)105004-1050043. 査読有
5. Extended MQCD and SUSY/non-SUSY duality,

K. Ohta, T. -S. Tai, JHEP0809:033, (2008)33-46 査読有

6. Instatnons in Non(anti)commutative Gauge Theory via Deformed ADHM Construction, T. Araki, T. Takashima, S. Watamura, "Noncommutative Geometry and Physics 2005," World Scientific (2007)253-260 査読有

7. Baryons in AdS/QCD, T. Inami, D-K Hong, H-U Yee, Physics Letters B646(2007)165-171, 査読有

[学会発表] (計 4 件)

1. Noncommutative Geometry in String and twisted Hopf algebra of Diffeomorphism, S. Watamura, "2nd School and Workshop on Quantum Gravity and Quantum Geometry" 2009 Corfu, Greece. 発表者, 綿村哲, 発表日時 2009年9月15日
2. A Hopf algebra structure in String theory, S. Watamura "Noncommutative Manifold II", 2007, Trieste, Italy. 発表者, 綿村哲, 発表日時 2007年10月22日,
3. Hopf algebra structure in string theory, S. Watamura, "Noncommutative Quantum Field Theory", 2007 Wien, Austria. 発表者 綿村哲, 発表日 2007年11月28日
4. ねじれたホップ代数とストリング, (森真志, 綿村哲, 浅川嗣彦) 2007年度日本物理学会, 北海道大学, 発表者 森真志, 2007年9月21日

[図書] (計 2 件)

1. Noncommutative Geometry and Quantum Spacetime in Physics, N. Sasakura and S. Watamura, Progress Theoretical Physics 2008, p1-p294.
2. Noncommutative Geometry and physics 2005, U. Carow-Watamura, Y. Maeda, S. Watamura, World Scientific 2007, p1-p324.

[その他]

国際会議主催

1. Noncommutative Geometry and Physics, 2009, Yokohama, 2009
2. Noncommutative Geometry and Physics -- K-theory and D-Brane -- 湘南国際村 2008

6. 研究組織

(1) 研究代表者

綿村 哲 (Satoshi Watamura)
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号 00201252

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

稲見 武夫, (Takeo Inami)
中央大学・理工学部・教授
研究者番 20012487
(H19 研究分担者)

太田 和俊, (Kazutoshi Ohta)
明治学院大学・法学部・専任講師
研究者番号 80442937
(H19-H20 研究分担者)