

平成 21 年 5 月 30 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2008

課題番号：19540304

研究課題名 (和文) ブラックホールの幾何学と佐々木—Einstein 計量

研究課題名 (英文) Geometry of Black Hole and Sasaki-Einstein Metric

研究代表者

安井 幸則 (YASUI YUKINORI)

大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：30191117

研究成果の概要：近年の超弦理論の発展は高次元の Einstein 方程式を解析する大きな動機づけを与えた。このような流れの中で高次元ブラックホールに存在する隠れた対称性を発見した。この結果をさらに発展させ「高次元ブラックホール解の一意性定理」を証明した。また、高次元ブラックホール解をコンパクト化することにより得られる佐々木—Einstein 計量を使ってゲージ・重力理論対応の検証を行った。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	2,400,000	720,000	3,120,000
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：物理学・素粒子・原子核・宇宙線・宇宙物理

キーワード：ブラックホール, 佐々木—Einstein 計量, ゲージ・重力理論対応

1. 研究開始当初の背景

素粒子の相互作用は、重力相互作用、電磁相互作用、強い相互作用、弱い相互作用と呼ばれる4つの相互作用で記述されることが知られている。超弦理論はこれらを統一する理論を与えると期待されているだけでなく、それぞれの相互作用の性質を解析するための「道具」としても大変有用であることがわかってきた。強い相互作用は低エネルギーにおいては結合定数が大きく、ファインマン規則を用いた摂動的な解析を行うことが難しくなる。このような強結合領域でのゲージ理論の振る舞いを調べることは、現実世界における現象を場の理論の第一原

理から導くという意味で重要である。また、一般のゲージ理論の強結合領域での性質を明らかにすることは数理解物理的にも大変興味深い問題と考える。

ゲージ理論の強結合領域における性質に対する我々の理解はここ10年余りで大きく進歩したが、そこで重要な役割を果たしたのは双対性という考えかたである。近年の超弦理論を用いたゲージ理論の解析に重要な役割を果たしているのは、ゲージ・重力理論対応と呼ばれる双対性である。1997年に Maldacena によって最初に提案されたゲージ・重力対応では、4つの超対称性を持つ $N=4$ 超対称ゲージ理論と、反 de-Sitter 空間を背

景時空とする超弦理論の間に対応関係があることを主張した。N=4 超対称ゲージ理論には共形対称性があり、現実世界とは大きく異なる理論ではあるが、この対称性を利用していろいろな物理量を厳密に計算することができるため、ゲージ・重力理論対応の正しさを検証するモデルとして活発な研究が行われている。

2. 研究の目的

ゲージ重力対応は4つの超対称性を持つ N=4 超対称ゲージ理論を中心に研究されてきた。この対応関係をいかに対称性の低いゲージ理論に適用するかという問題を考える。対称性の数が少ないゲージ理論では強結合領域を摂動的な手法で解析することが困難であるため、そのようなゲージ理論を調べるためにゲージ・重力理論対応を利用することは大きな意味があると思われる。また、現実の素粒子物理学への応用ということからも極めて重要である。N=1 の超対称性を持つ場合のゲージ・重力対応の研究として、分担者大田武志との共同研究がある。我々はブレーンタイリングと呼ばれる手法を使って、超重力理論のソリトン解に双対な N=1 超対称ゲージ理論を構成した。ゲージ・重力対応が正しいのであれば、そのようなソリトン解を記述する佐々木-Einstein 計量と呼ばれる5次元 Einstein 方程式の解が存在するはずである。この計量を頭に書き下すことは本研究の1つの目標である。

3. 研究の方法

Einstein 方程式の厳密解を求めることは大変難しい作業である。通常は解の対称性を仮定して有効な変数の自由度を落とすことを考える。これは非常に有効かつ重要な方法であるが、ここでは新しい手法として分担者橋本-阪口との共同研究：

“Sasaki-Einstein Twist of Kerr-AdS Black Holes” Phys.Lett.B600(2004)270,

に基づき、高次元ブラックホール解を正定値 Einstein 計量に解析接続する方法を提案した。4次元ブラックホール解を使ってコンパクト非等質な Einstein 多様体を構成した最初の仕事は1978年 Page によって行われた。彼はこの解を、Hawking の提案した「無からの宇宙生成」を記述する重力インスタントンと解釈した。本研究では、高次元のブラックホール解を使って得られるコンパクトな Einstein 多様体をゲージ・重力対応の検証に応用する。

こうして本研究を実行するためには高次元ブラックホール解の研究は必要不可欠なものとなる。幸いなことに近年この方面において大きな進展があった。1986年 Myers-Perry によって Kerr ブラックホール計量が高次元

に拡張された。引き続き2004年 Gibbons-Lu-Page-Pope によって宇宙定数を持つ高次元 Kerr-de Sitter 計量が発見された。さらに2006年 Chen-Lu-Pope は Gibbons たちの解を拡張し、NUT 電荷を持つ Kerr-NUT-de Sitter 計量と呼ばれる現在知られている最も一般的なブラックホール解を発見した。2007年になって、Frolov-Page たちのグループは、この高次元ブラックホール時空上の測地線方程式およびクライン・ゴールドン方程式が4次元の場合と同様に可積分であることを示した。この結果は、Kerr-NUT-de Sitter 計量にある種の隠れた対称性が存在することを示唆するものである。このような対称性を解析し高次元ブラックホール時空の幾何学を解明していくことは、これまで述べてきたゲージ・重力対応を解析する重要な手がかりを与えると考えられる。

4. 研究成果

分担者大田との共同研究[論文④]において、Kerr-NUT-de Sitter 時空上のディラック方程式の可積分性を示すことができた。さらに最近の大田との共同研究[arXiv:0812.1123]によると、Kerr-NUT-de Sitter 時空の線形摂動の方程式もある種のモードに制限すると可積分構造が現れる。測地線方程式、クライン・ゴールドン方程式に加えこのような一連の可積分性の出現は、Kerr-NUT-de Sitter 時空に隠れた対称性があることを意味する。論文⑥では、その正体がコンフォーマル Killing-矢野 (CKY) テンソルと呼ばれる特別なテンソル場であることを発見した。我々は CKY テンソルをもっと基本的な対象であると睨んでいる。実際、論文⑤⑭では、一般次元の時空において CKY テンソルの存在を仮定すると、Kerr-NUT-de Sitter 時空しか存在しないことを示す一意性定理を証明した(証明の詳細は論文①で発表した)。この結果は、CKY テンソルが時空の対称性だけでなく、計量テンソルまで決めてしまうという意味で驚きであり、今回の研究の最大の成果である。

また、Kerr-NUT-de Sitter 計量が正の宇宙項を持つことに注目すると幾何学的に興味深い構造が見えてくる。我々はウィック回転と呼ばれる正定値計量への解析接続とある種の極限操作 (BPS 極限) を組み合わせて Kerr-NUT-de Sitter 時空をコンパクト化することができることを示した[論文③]。こうして得られる空間に佐々木-Einstein 多様体がある。特に5次元の佐々木-Einstein 多様体はゲージ・重力理論の検証において重要な役割を果たすと考えられている。残念ながら今回の研究期間内では、論文⑭で提案した超対称ゲージ理論に双対な5次元佐々木-Einstein 多様体を捕らえることはできな

った。しかしながら、今回の研究で得られた高次元ブラックホールに関する知識の集積はゲージ・重力理論を検証する上で今後重要な役割を果たすであろうと考える。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 19 件)

① T. Houri, T. Oota and Y. Yasui, Closed conformal Killing-Yano tensor and uniqueness of generalized Kerr-NUT-de Sitter spacetime, *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 045015 (18pages), 査読有.

② 橋本義武, ヤン・ミルズ方程式と対称性, *数理科学* 549 (2009) 45-50, 査読無.

③ T. Houri, T. Oota and Y. Yasui, Generalized Kerr-NUT-de Sitter metrics in all dimensions, *Phys. Lett. B* **666** (2008) 391-394, 査読有.

④ T. Oota and Y. Yasui, Separability of Dirac equation in higher dimensional Kerr-NUT-de Sitter spacetime, *Phys. Lett. B* **659** (2008) 688-693, 査読有.

⑤ Y. Yasui, Conformal Killing-Yano tensor and Kerr-NUT-de Sitter spacetime uniqueness, *Int. J. Mod. Phys. A* **23** (2008) 2169-2171, 査読有.

⑥ T. Houri, T. Oota and Y. Yasui, Closed conformal Killing-Yano tensor and geodesic integrability, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008) 025204 (12pages), 査読有.

⑦ Y. Morisawa, S. Tomizawa and Y. Yasui, Boundary Value Problem for Black Rings, *Phys. Rev. D* **77**(2008) 064019(11pages), 査読有.

⑧ 橋本義武, 層～現代数学における図形, *数理科学* 3 (2008) 13-18, 査読無.

⑨ H. Itoyama, K. Mayuyoshi and M. Sakaguchi, $N=2$ quiver gauge model and partial supersymmetry breaking, *Nucl. Phys. B* **794** (2008) 216-230, 査読有.

⑩ M. Sakaguchi and K. Yoshida, A semiclassical string description of Wilson loop with local operators, *Nucl. Phys. B* **798** (2008) 72-88, 査読有.

⑪ M. Sakaguchi and K. Yoshida, Holography of non-relativistic string on $AdS_5 \times S^5$, *J. High. Energy. Phys.* 0802 (2008) 092 (28pages), 査読有.

⑫ M. Sakaguchi and K. Yoshida, Super Schrodinger algebra in AdS/CFT, *J. Math. Phys.* **49** (2008) 102302 (13pages), 査読有.

⑬ M. Sakaguchi and K. Yoshida, More super Schrodinger algebras from $psu(2, 2|4)$, *J. High. Energy. Phys.* 0808 (2008) 049 (14pages), 査読有.

⑭ T. Houri, T. Oota and Y. Yasui, Closed conformal Killing-Yano tensor and Kerr-NUT-de Sitter spacetime uniqueness, *Phys. Lett. B* **656** (2007) 214-216, 査読有.

⑮ T. Houri, T. Oota and Y. Yasui, Kerr-NUT-de Sitter curvature in all dimensions, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** (2007)F177-F184, 査読有.

⑯ T. Oota and Y. Yasui, New example of infinite family of quiver gauge theories, *Nucl. Phys. B* **762** (2007) 377-391, 査読有.

⑰ Y. Hashimoto, A short proof of Morley's theorem, *Elem. Math.* 62 (2007) no.3, 121, 査読有.

⑱ 橋本義武, アティヤ・シンガーの指数定理, *数学セミナー* 12 (2007) 24-27, 査読無.

⑲ 橋本義武, ゲージ理論, *数理科学* 8 (2007) 26-32, 査読無.

[学会発表] (計 31 件)

① 大田武志, 「高次元ブラックホール時空における重力摂動の変数分離性について」日本物理学会, 2009年3月30日, 立教大学.

② 安井幸則, 「コンフォーマル Killing-矢野テンソルを持つコンパクトな Einstein 多様体」日本数学会幾何分科会, 2009年3月28日, 東京大学.

③ 阪口真, 「Super Schrodinger invariant field theories」日本物理学会企画講演, 2009年3月27日, 立教大学.

④ 阪口真, 「Non-relativistic limit of supersymmetric Chern-Simons-matter

theories」大阪素粒子論セミナー, 2009年3月23日, 大阪市立大学文化交流センター.

⑤ 橋本義武, 「On the signs of the combinatorial Heegaard-Floer complexes」第4回代数・解析・幾何セミナー, 2009年2月17日, 鹿児島大学理学部.

⑥ 大田武志, 「Closed conformal Killing-Yano tensor and generalized Kerr-NUT-de Sitter spacetime」研究集会「擬リーマン幾何学の展開」, 2009年2月17日, お茶の水女子大学.

⑦ 安井幸則, 「高次元ブラックホール時空における重力摂動の変数分離性について」特異点研究会, 2009年1月11日, 高エネルギー物理学研究所.

⑧ 阪口真, 「Super Schrodinger invariant field theories」Sapporo Winter School, 2009年1月8日, 北海道大学.

⑨ 阪口真, 「Super Schrodinger algebra & non-relativistic limits of supersymmetric Chern-Simons-matter theories」理研シンポジウム「場と弦の理論の新展開に向けて」, 2008年12月20日, 理化学研究所.

⑩ 阪口真, 「Non-relativistic limits of supersymmetric field theories & Super Schrodinger algebra」KEK研究会「ヘテロティック弦とM理論」, 2008年12月2日, 高エネルギー研究所.

⑪ 橋本義武, 「曲面のスピン構造をめぐって」日本数学会トポロジー分科会特別講演, 2008年9月26日, 東京工業大学.

⑫ 阪口真, 「Super Schrodinger in Super Conformal」日本物理学会, 2008年9月21日, 山形大学.

⑬ 大田武志, 「Closed conformal Killing-Yano tensor and uniqueness of generalized Kerr-NUT-de Sitter spacetime」日本物理学会, 2008年9月20日, 山形大学.

⑭ 阪口真, 「Super Schrodinger in Super Conformal」研究会「量子場理論と弦理論の発展」, 2008年7月31日, 京都大学基礎物理学研究所.

⑮ 安井幸則, 「コンフォーマル Killing-矢野テンソルを持つ Einstein 空間の分類」研究会「量子場理論と弦理論の発展」, 2008年7月30日, 京都大学基礎物理学研究所.

⑯ 大田武志, 「Kerr-NUT-de Sitter spacetimes and conformal Killing-Yano tensor」セミナー, 2008年7月22日, 大阪大学素粒子論研究室.

⑰ 阪口真, 「Holography of non-relativistic string on AdS₅×S⁵」SUSY2008, 2008年6月21日, Seoul, Korea.

⑱ 安井幸則, 「高次元ブラックホール幾何学と佐々木-Einstein 計量」セミナー, 2008年5月19日, 名古屋大学多元数理科学研究科.

⑲ 大田武志, 「Nambu-Goto Like Action for AdS₅×S⁵ Superstrings in the Generalized Light-Cone Gauge」日本物理学会, 2008年3月26日, 近畿大学.

⑳ 安井幸則, 「佐々木-Einstein 計量と AdS/CFT 対応」日本物理学会・数学会合同セッション招待講演, 2008年3月22日, 近畿大学.

㉑ 橋本義武, 「Non-Commutative geometry」宿泊型研究会「ブラックホール, 佐々木-Einstein そして AdS/CFT 対応」, 2008年2月16日, 岡山菊乃野旅館.

㉒ 安井幸則, 「ブラックホールの幾何学と佐々木-Einstein 多様体」宿泊型研究会「ブラックホール, 佐々木-Einstein そして AdS/CFT 対応」, 2008年2月15日, 岡山菊乃野旅館.

㉓ 大田武志, 「Some properties of Kerr-NUT-de Sitter spacetime」大阪市立大学数学研究所特別賞受賞講演, 2008年1月30日, 大阪市立大学.

㉔ 橋本義武, 「5次方程式と正20面体」高校生と社会人のための現代数学入門講座・新春特別講義, 2008年1月12日, 京都大学理学部.

㉕ 安井幸則, 「Conformal Killing-Yano tensor and Kerr-NUT-de Sitter spacetime uniqueness」Progress of String Theory and Quantum Field Theory, 2007年12月9日, 大阪市立大学.

㉖ 橋本義武, 「Tilting sheaves and D-affinity」研究集会「函館幾何セミナー」2007年11月15日, KKRはこだて.

㉗ 安井幸則, 「Conformal Killing-Yano tensor and Kerr-NUT-de Sitter black hole

uniqueness」第13回菅平複素幾何シンポジウム招待講演, 2007年10月25日, 信州菅平高原ホテルゾントック.

㊸ 安井幸則, 「Conformal Killing-Yano tensor and Kerr-NUT-de Sitter spacetime uniqueness」微分幾何セミナー, 2007年10月10日, 大阪市立大学.

㊹ 安井幸則, 「Black Hole, Sasaki-Einstein Manifold and AdS/CFT Correspondence」力学系と微分幾何学, 2007年9月13日, 京都大学数理解析研究所.

㊺ 安井幸則, 「Black Hole, Sasaki-Einstein Manifold and AdS/CFT Correspondence」幾何セミナー, 2007年6月25日, 大阪大学理学部数学科.

㊻ 大田武志, 「Zpq クイバーゲージ理論と関連した話題について」セミナー, 2007年6月12日, 岡山光量子科学研究所.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

安井 幸則 (YASUI YUKINORI)
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 30191117

(2) 研究分担者

橋本 義武 (HASHIMOTO YOSHITAKE)
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 20271182

大田 武志 (OTA TAKESHI)
大阪市立大学・大学院理学研究科数学研究所・専任研究員
研究者番号: 70419688

阪口 真 (SAKAGUCHI MAKOTO)
岡山光量子科学研究所・研究員
研究者番号: 90382027

(3) 連携研究者

阪口 真 (SAKAGUCHI MAKOTO)
岡山光量子科学研究所・研究員
研究者番号: 90382027
(2008年度から連携研究者に変更)