

研究種目： 基盤研究 (C)

研究期間： 2007~2009

課題番号： 19540391

研究課題名 (和文)  $\kappa$  エントロピ最大原理の基礎となる非線型拡散方程式

研究課題名 (英文) Nonlinear diffusion equations for maximum entropy principle with kappa-entropy

研究代表者

和田 達明 ( WADA TATSUAKI )

茨城大学・工学部・准教授

研究者番号： 00240549

研究成果の概要 (和文)：本研究は、トリノ工科大学の G. Kaniadakis, A.M. Scarfone 両博士が 2002 年に提案した、従来のエントロピの 1 実数パラメータ ( $\kappa$ ) による拡張である  $\kappa$  エントロピに基づいた統計力学の拡張に関する研究である。 $\kappa$  エントロピに関連した異常拡散過程を記述する非線型方程式および非線型 Fokker-Planck 方程式の具体的表式を求め、それらの長時間にける漸近解と  $\kappa$  エントロピ最大原理を基礎付けるメカニズムを明らかにした。

研究成果の概要 (英文)：This work is a research study on the kappa-generalized thermostatics based on kappa-entropy, which was proposed in 2002 by Dr. G. Kaniadakis and Dr. A. M. Scarfone in Politechnical University in Torino (Politecnico di Torino), Italy. We have found that the explicit expressions of the nonlinear diffusion and Fokker-Planck equations associated with kappa-entropy, and shown the underlying mechanism of the generalized maximum entropy (MaxEnt) principle for kappa-entropy.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：物理学・数理物理・物性基礎

キーワード： $\kappa$  エントロピ、エントロピ最大原理、非線型拡散方程式、Fokker-Planck 方程式、リアプノフ汎関数、ダイバージェンス

## 1. 研究開始当初の背景

自然界や工学において良くみられる漸近的にベキ分布に従う現象は、平衡状態で確立された指数分布や Gauss 分布とは異なり、特

微的な時間や長さを持たないスケールフリーな非平衡現象 (例えば、乱流やプラズマにおける異常拡散、多孔質媒質中における輸送現象、パーコレーション、フラクタル上の拡

散など)である。そのような漸近的ベキ分布を、エントロピ最大原理に基づいて説明するアプローチである非加法的統計力学は、従来の Boltzmann-Gibbs-Shannon エントロピを1パラメータ拡張した一般化エントロピに基づく統計力学の拡張である。

そのひとつである Tsallis エントロピは近年急速に研究者の興味を魅き、統計物理の分野に限らず、情報理論や経済物理等の様々な分野に適用されているが、このようなパラメータ拡張によるエントロピの一般化は決して一意的ではないことが Naudts 博士により示されていた。2002年に Kaniadakis 博士と Scarfone 博士が提案した  $\kappa$  エントロピは、先の Tsallis エントロピとは異なるタイプの1パラメータ拡張であり、その基礎研究は未だ始まったばかりで世界的にも研究者の数は少ないが、研究当初の時点で相対論的な統計力学の構築の試みや Bose-Einstein 凝縮系への適用がなされ、その有効性が注目されていた。

良く知られているように、拡散方程式は従来の統計力学を基礎付ける重要な(線型)方程式であり、その解は Gauss 型の自己相似解である。古くから知られている多孔質媒質中におけるガスの輸送方程式である非線型拡散方程式(porous medium equation)の、長時間における自己相似型の漸近解が、Tsallis の  $q$ -Gauss 関数(Gauss 関数を  $q$ パラメータ拡張した関数)に等しいことと、長時間漸近解と非線型の一般化エントロピ最大原理との関連が、主として椎野、Frank 等の研究により明らかになった。この事実を踏まえて、より一般的に、ある非線型拡散方程式と整合する非線型 Fokker-Planck 方程式に従う確率分布関数の時間発展に対して、常に非増加となるリアプノフ汎関数が存在し、その最小値において対応する一般化エントロピが最大となるというメカニズムが、多孔質媒質中の非線型方程式のみに成立するのではなく、もっと広く一般化エントロピに対する最大原理の物理的基礎過程を特徴付ける新しいメカニズムであると予想し、本研究の着想に至った。

## 2. 研究の目的

本研究は、2002年に G. Kaniadakis, A.M. Scarfone 両博士により提案された実数パラメータ  $\kappa$ により拡張されたエントロピである  $\kappa$ エントロピに特化した研究であり、研究の最終目的は、 $\kappa$ エントロピに基づく統計力学の基本原理解である  $\kappa$ エントロピ最大原理を基礎付けている物理機構を、関連する異常拡散過程を記述する非線型方程式の解の時間発展の観点から明らかにすることである。具体的な各年度の目標としては、

(1)  $\kappa$ エントロピに基づく一般化統計力学

の基礎となる非線型拡散方程式の具体的な表式を求め、

(2) その非線型拡散方程式の漸近解の特徴(自己相似性、スケーリング性)を明らかにする。

及び、

(3) 前年度に得られた非線型拡散方程式や非線型 Fokker-Planck 方程式の漸近解を求める。

(4) 非線型 Fokker-Planck 方程式の漸近解の挙動を特徴づけるリアプノフ汎関数と Bregman ダイバージェンスとの関係から  $\kappa$ エントロピ最大原理のメカニズムを解明する。

を掲げ、研究を進行した。

## 3. 研究の方法

(1) 海外研究協力者である Scarfone 博士との共同研究を通じて、研究当初の時点において明らかになっていた  $\kappa$ 統計力学における熱力学的関係式と、それらに整合する非線型 Fokker-Planck 方程式を利用して、非線型拡散方程式の具体的な表式を先ず求めた。

(2) この非線型方程式で記述される異常拡散のベキ指数を、様々な初期値に対して数値的に調べることで、漸近解の系統的な振舞いを把握できると予想して、数値解の振る舞いを調べた。

多孔質媒質中の輸送方程式である非線型拡散方程式の自己相似解は、 $q$ 拡張された Gauss 型分布関数である  $q$ -Gauss 型分布関数に等しいことが既に判っていたが、 $\kappa$ エントロピに関する非線型拡散方程式の漸近解が、 $\kappa$ -Gauss 分布関数であるかどうかという点や、 $\kappa$ -Gauss 分布関数に対して自己相似性(スケーリング)が成立するのかどうかは、研究開始時点では全く判っていなかった。そこで、このような自己相似解の存在が確立するまでに成された研究手法に習い、様々な初期データに対して、非線型拡散方程式の長時間漸近解を数値的に求め、自己相似(スケーリング)性が成立するかどうかを系統的に調べた。

(3) 海外研究協力者の Scarfone 博士との共同研究を通じて、更に一般的な2パラメータ拡張の観点からこれらの1パラメータ拡張された  $\kappa$ -Gauss 関数を統一的に理解できることが判明したので、この系統性を利用して、 $\kappa$ パラメータ拡張した Gauss 分布関数に対する自己相似(スケーリング)性に関する知見を得た。

(4) 関連する非線形 Fokker-Planck 方程式及びリアプノフ汎関数を求め、 $\kappa$ エントロピ最大原理の背後にある物理機構を基礎付けるメカニズムについて理論的研究を行った。

#### 4. 研究成果

(1)  $\kappa$  エントロピに基づく統計力学の基礎過程となる異常拡散現象を記述する非線型拡散方程式および関連する非線型 Fokker-Planck 方程式の具体的表式を求めた。

(2) この非線型 Fokker-Planck 方程式の解の時間発展を特徴付けるリアプノフ汎関数を求め、時刻無限大における停留解 (平衡解) が  $\kappa$  エントロピを最大とする最適解に等しいことを示した。

(3)  $\kappa$  エントロピ最大原理の物理的基礎課程を基礎付けるメカニズムとして、非線型拡散方程式の解の時間発展  $\Rightarrow$  リアプノフ汎関数の最小化  $\Rightarrow$   $\kappa$  エントロピの最大化 という対応関係が成立することを明らかにした。

(4) また、このリアプノフ汎関数は、パラメータ  $\kappa$  で拡張された自由エネルギーの差で表せることと、凸解析や情報幾何の分野における Bregman ダイバージェンス (相対エントロピ) に等しいことが判り、今後の研究として、情報幾何との深い関連があることが示唆される。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

- ① A. Ohara, T. Wada, Information geometry of  $q$ -Gaussian densities and behaviors of solutions to related diffusion equations, J. Phys. A: Math. Theor. 査読有, **43** (2010) 035002 (18pp)
- ② T. Wada, Generalized log-likelihood functions and Bregman divergences, J. Math. Phys., 査読有, **50** (2009) 113301 (7pp).
- ③ T. Wada, A nonlinear drift which leads to  $\kappa$ -generalized distributions, Eur. Phys. J. B, 査読有, **73** (2009) 287-291.
- ④ A. M. Scarfone, T. Wada, Lie symmetries and related group-invariant solutions of a nonlinear Fokker-Planck equation based on the Sharma-Taneja-Mittal entropy, Brazilian J. Phys., 査読有, **39** (2009) 478-485.
- ⑤ T. Wada and A. M. Scarfone, Asymptotic solutions of a nonlinear diffusive equation in the framework of  $\kappa$ -generalized statistical mechanics, The European Physical Journal B, 査読有, **70** (2009) 65-71.
- ⑥ A. M. Scarfone, H. Suyari, T. Wada, Gauss' law of error revisited in the framework of Sharma-Taneja-Mittal information measure, Central European Journal of Physics, 査読有, **7** (2009) 414-420.
- ⑦ T. Wada and A. M. Scarfone, On the non-linear Fokker-Planck equation associated with  $\kappa$ -entropy, AIP Conference Proceedings, 査読有, **965** (2007) 177-180.

[学会発表] (計 8 件)

- ① T. Wada, A. M. Scarfone, Finite difference and averaging operators in generalized entropies, 京都大学数理解析研究所 (RIMS) 国際ワークショップ「Mathematical Aspects of Generalized Entropies and their Applications」, Kyoto, July 7-9 (2009), 2009 年 7 月 7 日, 京都テルサ
- ② 和田 達明,  $\kappa$ -Gauss 分布を定常状態とする非線型ドリフト, 日本物理学会第 64 回年次大会, 2009 年 3 月 30 日, 立教学院池袋キャンパス
- ③ 和田 達明,  $\kappa$ -エントロピに関する非線型拡散方程式, 日本物理学会 2008 年秋季大会, 2008 年 9 月 23 日, 岩手大学
- ④ T. Wada, A. M. Scarfone, Asymptotic solutions of a nonlinear diffusive equation in the framework of  $\kappa$ -generalized statistical mechanics, International Conference in Statistical Physics, (SigmaPhi2008), 2008 年 7 月 17 日, Orthodox Academy of Crete, Greece
- ⑤ 和田 達明, Gauss の誤差法則と Hyperensembles, 日本物理学会第 63 回年次大会, 2008 年 3 月 25 日, 近畿大学理工学部
- ⑥ 和田 達明, 一般化熱統計学における Legendre 構造: 非線形 Fokker-Planck 方程式における Bregman divergence との関連, RIMS 研究集会「非可換解析とミクロ・マクロ双対性」, 2007 年 10 月 15 日,

京都大学数理解析研究所 (RIMS)

- ⑦ 和田 達明、非線型 Fokker-Planck 方程式の自己相似解の漸近挙動と一般化エントロピー最大原理、日本物理学会第 62 回年次大会、2007 年 9 月 21 日、北海道大学
- ⑧ T. Wada, On the non-linear Fokker-Planck equation associated with  $\kappa$ -entropy, International Conference on Complexity, Metastability and Nonextensivity, (CT-NEXT07), 2007 年 7 月 4 日, Catania University, Italy

[その他]

ホームページ等

茨城大学研究者情報総覧

<http://info.ibaraki.ac.jp/scripts/websearch/index.htm>

個人ホームページ

<http://www.ipc.ibaraki.ac.jp/~wada>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

和田 達明 (Wada Tatsuaki)

茨城大学・工学部・准教授

研究者番号：00240549

### (2) 海外研究協力者

Antonio Maria Scarfone

トリノ工科大学・物理学科・准教授