

平成 21 年 6 月 3 日現在

研究種目：基盤研究 (C)
研究期間：2007～2008
課題番号：19560059
研究課題名 (和文) 硬い常微分方程式が与える連続力学系の周期解の数値計算
研究課題名 (英文) Numerical computation of periodic solutions of continuous dynamical systems given by stiff ordinary differential equations
研究代表者
村重 淳 (MURASHIGE SUNAO)
公立はこだて未来大学・システム情報科学部・教授
研究者番号：40302749

研究成果の概要：カオスに代表される複雑な非線形現象を体系的にとらえるためには、システムの基本的な状態（平衡点、周期解など）の安定性を調べる必要がある。本研究では、常微分方程式で与えられるシステムの周期解の安定性を、コンピュータを用いて数値的に精度良く調べる方法を提案した。代表的な常微分方程式に対して提案手法を適用した結果、従来の手法ではかなり誤差が大きくなる条件でも、精度の良い計算結果が得られることがわかった。

## 交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2008 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,900,000	570,000	2,470,000

研究分野：工学

科研費の分科・細目：工学基礎

キーワード：数理工学，力学系，数値計算，安定性解析，微分方程式，周期解

## 1. 研究開始当初の背景

カオスに代表される複雑な非線形現象を力学系理論の観点から体系的にとらえる方法として、分岐解析がしばしば用いられる。システムの基本的な状態（平衡点、周期解など）の安定性をコンピュータを用いて数値的に調べることで、複雑な分岐現象の解析を行うことができる。そのための計算方法に関する研究はかなり行われていて、フリーのソフトウェア (AUTO など) も手に入るようになっている。しかし、条件によっては、誤差が無視できないほど大きい計算結果が得られることが知られている。特に、常微分方程

式が「硬い」条件をみたすとき、従来の計算方法で周期解の安定性を調べると、明らかに誤差の大きい結果が得られる場合がある。カオスの発生に関連する重要な周期解は「硬い」条件をみたすことが多いので、従来の計算結果の誤差は無視できない。そこで、本研究では、常微分方程式の周期解の数値計算方法に焦点をあて、「硬い」条件でも精度の良い安定性解析が可能な計算方法を新たに提案することを考えた。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、常微分方程式の周期解の

安定性を精度良く数値的に評価する方法を開発することである。周期解の安定性は、常微分方程式と変分方程式を適当な境界条件のもとで連立して解くことにより評価できる。本研究では、つぎの2点の改良を試みた。

#### (1) 境界条件の改良

従来の研究では、安定性の計算結果の精度に対する検討がほとんど行われていない。本研究では、周期解の安定性に関する性質を、微分方程式の境界条件に反映させることにより精度を上げることを考えた。

#### (2) 変分方程式の数値計算法の改良

従来の計算方法では、変分方程式は初期値問題として解かれているため、数値誤差の制御が難しい。本研究では、微分方程式の解の性質を利用して、変分方程式を反復的に解く方法を考えた。

### 3. 研究の方法

常微分方程式は、ベクトル場の性質によって自律系と非自律系に分けることができる。本研究では、初年度は自律系、2年目は非自律系を考えた。

#### (1) 自律系

ベクトル場に時間を表す独立変数が陽に含まれないとき、その常微分方程式は自律系であるという。このとき、周期解の安定性を決定する行列の固有値 (Floquet 乗数) の1つは必ず1になるという性質がある。この性質を境界条件として採用することにより、周期解の安定性に関する計算結果の精度を上げることを試みた。対象とする方程式として Van der Pol - Duffing 方程式を用いて、実際に提案手法を適用することによりその有効性を確認した。

#### (2) 非自律系

自律系でない常微分方程式を非自律系とよぶ。このときは、(1)で述べたような周期解の安定性に関する性質は使えない。そこで、本研究では、変分方程式を反復的に解くことにより数値誤差を制御することを試みた。また、変分方程式の初期値の与え方も工夫した。対象とする方程式として Mathieu 方程式を用いて、実際に提案手法を適用することによりその有効性を確認した。

### 4. 研究成果

#### (1) 研究の主な成果

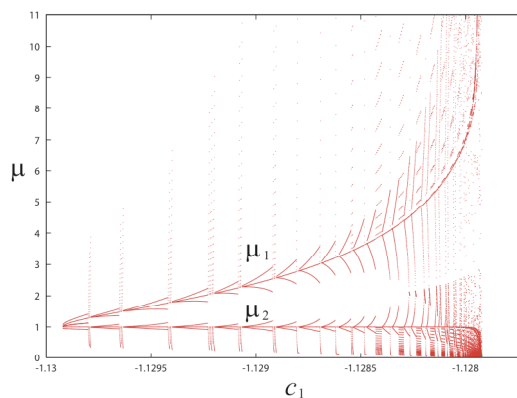
本研究で考えている周期解の安定性は、常微分方程式と変分方程式を適当な境界条件のもとで解くことにより調べることができる。特に、変分方程式の行列解の固有値が周期解の安定性を決定する。この問題に対して

従来の計算方法を適用した結果、単純に常微分方程式と変分方程式の解法の精度を上げるだけでは、安定性の結果の精度は良くならないことがわかった。そこで、以下の3点を改良することにより、従来の計算方法では誤差が大きい結果が得られる条件でも、精度の良い安定性の結果を得ることができるとわかった。

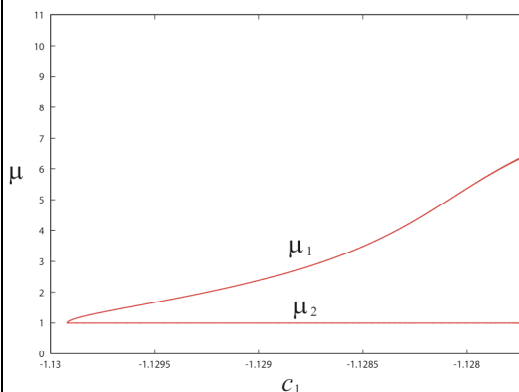
#### ① 自律系の境界条件の改良

自律系の常微分方程式の周期解は、安定性を決定する行列の固有値の1つが必ず1になることが知られている。本研究では、この性質を常微分方程式の境界条件として採用した。この方法により、数値計算の結果も必ずこの性質をみたすことが期待できる。Van der Pol - Duffing 方程式の周期解に対して提案方法を適用した結果、図1のような安定性の計算結果を得た。従来の方法では明らかに誤差が大きい場合でも、提案手法により精度の良い結果が得られることがわかった。

この成果は、2008年に電子情報通信学会の英文誌に発表した。



(a) 従来の手法



(b) 提案手法

図1. Van der Pol - Duffing 方程式の周期解に対する計算結果 ( $c_1$ : パラメータ,  $\mu$ : 変分方程式の行列解の固有値)

### ② 変分方程式の数値計算法の改良

変分方程式の解の精度は、周期解の安定性を決定する固有値の精度と直接関係している。従来の計算方法では、変分方程式を Runge-Kutta 法のような初期値問題に対する解法を用いて解いているため、解の精度の制御が難しい。特に、周期解が平衡点付近を通る場合は、時間刻みの制御、あるいは陰的解法を適用しても、精度を上げることは難しかった。そこで、本研究では、微分方程式の解の性質と multiple shooting 法を利用して、変分方程式を反復的に解く方法を提案した。

### ③ 変分方程式の初期値の改良

周期解の安定性は、変分方程式の行列解の固有値により決まる。変分方程式の初期値行列は、正則行列であれば任意に選べる。初期値行列の選び方によって、行列解の固有値は変わらないが、行列解の各成分の値は変わる。行列のある成分が他の成分と比べてかなり大きい場合、行列の固有値計算は丸め誤差の影響を受けやすい。本研究では、そのような丸め誤差の影響を受けにくい初期値行列の選び方として、行列解の固有ベクトルを縦ベクトルとして並べた行列を採用する方法を提案した。

②と③の方法を非自律系の例として Mathieu 方程式に適用すると、図 2 のような結果が得られた。従来の方法と比べてかなり精度の良い結果が得られていることがわかる。また、②と③の方法は自律系にも適用できる。図 3 は自律系の例として FitzHugh-Nagumo 方程式に提案手法を適用した結果を表している。

②と③の成果は、2007 年と 2008 年の応用数学会の年会、2008 年の非線形理論とその応用に関する国際会議 (NOLTA'08) で口頭発表し、2009 年に電子情報通信学会の英文誌に発表した。

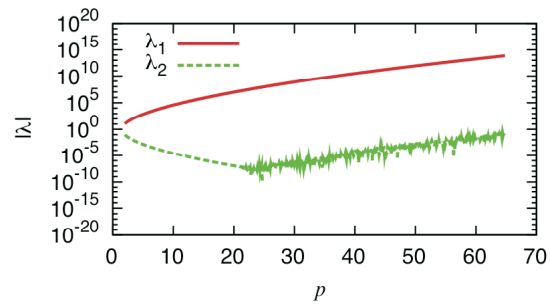
### (2) 得られた成果の国内外における位置づけとインパクト

「研究開始当初の背景」で述べたように、常微分方程式の周期解の安定性を数値的に調べる方法に関する研究はかなり行われていて、フリーのソフトウェアも手に入る。しかし、従来の方法では、計算結果が周期解の安定性に関するいくつかの性質をみたくしている保証はない。実際、従来の方法では明らかに誤差の大きい計算結果が得られることが知られている。また、陰的解法に代表される微分方程式の高精度数値計算法に関する研究もかなり古くから行われているが、本研究で考えている問題に対しては有効でない

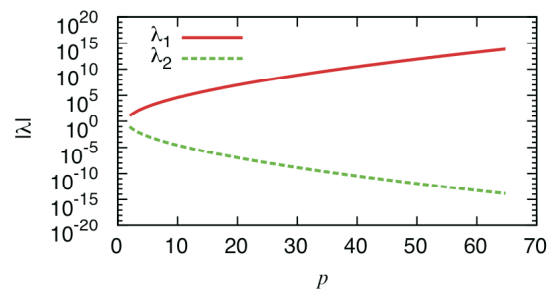
ことがわかった。このような未解決の問題を、本研究では周期解の安定性の性質を積極的に数値計算方法に取り入れることにより解決した。

本研究のテーマは「力学系の数値解析」のテーマの 1 つとして位置づけることができるが、提案手法のアイデアは他に例をみない。

本研究の成果は最近公表したので、そのインパクトに関する評価はできないが、国際会議での反応は良好で、論文に関する問い合わせも受けている。今後、力学系の数値解析に関する分野で、提案手法が利用されることを期待している。



(a) 従来の方法



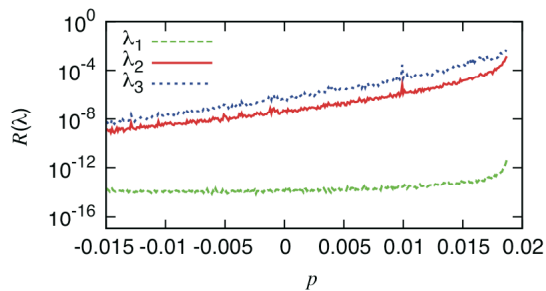
(b) 提案手法

図 2. Mathieu 方程式の周期解に対する計算結果 ( $p$ : パラメータ,  $\lambda$ : 変分方程式の行列解の固有値)

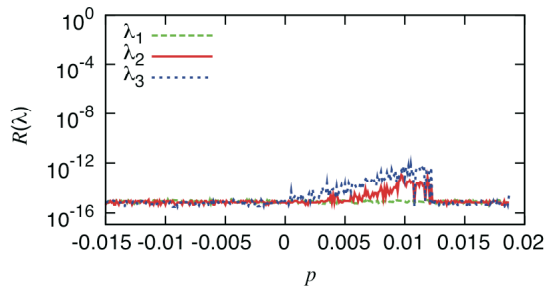
### (3) 今後の展望

本研究で提案した方法は、一般の常微分方程式の周期解に適用できる。本研究では比較的簡単な方程式を考えたので、今後は他の系に対して提案手法を適用することにより、その有効性を示したい。

また、本研究の提案手法、特に変分方程式を反復的に解く方法は、不動点定理に基づいた計算結果の精度の検証に適していると考えられる。精度保証付き数値計算に関する研究は最近飛躍的に進歩しているが、変分方程式の解も含めた計算結果の精度の検証は未だ行われていないので、今後試みたいと考えている。



(a) 従来の手法



(b) 提案手法

図 3. FitzHugh - Nagumo 方程式の周期解に対する計算結果 ( $p$ : パラメータ,  $R(\lambda)$ : 変分方程式の行列解の固有値  $\lambda$  の誤差)

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① Yu Nureki and Sunao Murashige,  
Computation of Floquet multipliers using an iterative method for variational equations, IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 査読有, Vol.E92-A, 2009, pp.1331-1338.
- ② Yu Nureki and Sunao Murashige,  
Improvement of the multiple shooting method for stability analysis of periodic orbits of ordinary differential equations, Proceedings of the 2008 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA'08), 査読有, CD-ROM, 2008, pp.211-214.

- ③ Sunao Murashige, Boundary conditions for numerical stability analysis of periodic solutions of ordinary differential equations, IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 査読有, Vol.E91-A, 2008, pp.1162-1168.

[学会発表] (計 6 件)

- ① 濡木 融, 周期解の Floquet 乗数の数値計算法, 日本応用数理学会 2008 年度年会, 2008 年 9 月 17 日, 東京大学柏キャンパス.
- ② 濡木 融, Improvement of the multiple shooting method for stability analysis of periodic orbits of ordinary differential equations, 2008 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA'08), 2008 年 9 月 8 日, ハンガリー・ブダペスト.
- ③ 村重 淳, 共役写像を用いた解の性質の検証法, 九州大学研究集会「流れ問題のための高品質数値解法と精度保証計算」, 2007 年 11 月 19 日, 島根県松江市島根県民会館.
- ④ 濡木 融, Multiple shooting 法による常微分方程式の周期軌道の計算, 日本応用数理学会 2007 年度年会, 2007 年 9 月 17 日, 北海道大学工学部.
- ⑤ 村重 淳, 常微分方程式の周期解に対するモノドロミー行列の数値計算, 京都大学数理解析研究所研究集会「力学系とその応用における新展開」, 2007 年 6 月 15 日, 京都大学数理解析研究所.
- ⑥ 村重 淳, 計算ホモロジー理論の写像度の計算への応用, 京都大学数理解析研究所研究集会「力学系とその応用における新展開」, 2007 年 6 月 14 日, 京都大学数理解析研究所.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

村重 淳 (MURASHIGE SUNAO)

公立はこだて未来大学・システム情報科学部・教授

研究者番号: 40302749

### (2) 研究分担者

### (3) 連携研究者