様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　23　年　6月　10日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2007～2009
課題番号：１９５６００６１
研究課題名（和文）ＤＥ－Ｓｉｎｃ法の展開

研究課題名（英文）　Developments of DE-Sinc Methods

研究代表者
杉原　正顯（SUGIHARA　MASAAKI）
東京大学・大学院情報理工学系研究科・教授
研究者番号：８０１５４４８３

研究成果の概要（和文）：
近年，高橋・森によって数値積分用に提案された二重指数関数型変数変換を，Stenger 等によって開発された Sinc 数値計算法に組み入れることによって，高精度の数値計算法（DE-Sinc 法と呼ばれる）が得られることが分かってきた．本研究では，積分方程式，常微分方程式，Poisson 方程式に対する DE-Sinc 法を設計し，その理論解析を与えた．また，本件と関係して，大規模連立一次方程式の数値解法に関しても新しい高速解法を提案した．

研究成果の概要（英文）：
Recently it has turned out that, when incorporated with the double exponential transformation proposed by Takahasi and Mori for quadrature formulae, the Sinc numerical methods developed by Stenger and his colleagues, yield highly efficient numerical methods (which are referred to as DE-Sinc methods). We here develop the DE-Sinc methods for integral equations, ordinary differential equations and Poisson equation together with their theoretical analyses. Further, related to them, we develop a new fast solver for a large system of linear equations.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２００８年度	1,000,000	300,000	1,300,000
２００９年度	1,300,000	390,000	1,690,000
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数値解析
科研費の分科・細目：応用物理学・工学基礎　工学基礎
キーワード：数値計算，ＤＥ変換，Ｓｉｎｃ法，積分方程式の数値解法，常微分方程式の数値解法，ポアッソン方程式，連立一次方程式の数値解法，共役勾配法，クリロフ部分空間法

１．研究開始当初の背景

数値計算技術が現在の科学技術の基盤をなすことは論をまたないであろう．しかし，従来，数値計算の分野において用いられてきた数値計算法は，主に多項式近似に基づくものであり，一般的に，関数が区間上で解析的である場合には非常に有効であるが，区間の端点に代数的特異点や対数特異点をもつ場合には有効性を著しく欠くことが知られている．これに対して，Stenger 等は，Sinc 近似

$$f(x) \approx \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(jh) \frac{\sin[(\pi/h)(x-jh)]}{(\pi/h)(x-jh)}$$

および変数変換の技法を用いることによっ

て，関数が区間の端点に特異性をもっても有効性が落ちず，誤差のオーダが exp(-c√n)（ここでnは近似に用いられる標本点の個数である）であたえられるような多くの数値計算法を開発した（これらの数値計算法は総称して **Sinc 法**と呼ばれている）．しかしながら，Stenger 等は Sinc 法と結びつける変数変換の技法としていわゆる一重指数関数型変数変換のみしか考慮していない．一方，わが国には，数値積分の分野において，変数変換の技法に関する研究の伝統があり，一重指数関数型変数変換のみならず，それ以外の変数変換についても深い研究がなされており，特に，1974 年，高橋秀俊・森正武によって提案された二重指数関数型変数変換（Double Exponential 変換－以下略して DE 変換と記す）は数値積分における最適な変数変換として名高い．杉原（研究代表者）は，この数値積分における DE 変換の理論を整備し，森（研究分担者）とともに，DE 変換を Sinc 法に組み入れることの可能性を検討し，いくつかの Sinc 法において誤差のオーダが exp(-cn/log(n))に改良されることを証明した(この DE 変換を組み入れた Sinc 法は **DE －Sinc 法**と呼ばれている)．しかしながら，まだ多くの Sinc 法に関しては，DE 変換を組み入れることの可能性は未検討のままである．

２．研究の目的

上記のような研究背景の下，我々は，実用的にも意義の深い，

(1) 積分方程式に対する Sinc 法 (常微分方程式の初期値問題は，積分方程式に帰着されるので，これも研究対象に入る)

(2) Poisson 方程式に対する Sinc 法

に対して DE 変換の組み入れを検討する．

理論，実験の両面から，アルゴリズムの有効性（誤差のオーダ，アルゴリズムの安定性等）を調べ，有効性の確立されたものについては，汎用プログラムの形で公開する．なお，Poisson 方程式に対する Sinc 法においては，構造をもつが，悪条件の大規模線形方程式が現れる．DE-Sinc 法においては，条件がさらに悪くなると予想される．したがって，これを，いかに高速に，精度良く解くかが重要な課題となる．本研究では，共役勾配法系の反復解法（クリロフ部分空間法）の開発も視野に入れる．

３．研究の方法

本研究は理論が重点の研究であり，研究を進めるにあたって，文献調査，数値実験による理論の確認は行うものの，他に特別な方法は用いていない．

４．研究成果

DE-Sinc 法およびそれに関連する以下の成果を得た．

(1) 積分方程式の数値解法

① 特異核を持つ第二種積分方程式に対する DE-Sinc 数値計算法の提案とその理論誤差解析：　弱特異核を持つ第二種積分方程式に対する Sinc 数値計算法は，Volterra 型の場合に Riley によって提案され，非常に高精度であることが数値実験を通して報告されており，粗雑ではあるが誤差の理論解析も行われていた．これに対して，我々は,DE 変換を用いた Sinc 数値計算法を Fredholm 型も含む場合に提案した．また，その理論誤差解析を厳密な形で与えた．特に，Riley の論文における「未知関数に対する仮定やサンプリング数の大きさに関する制限」といった不自然な仮定を取り除いた形での収束定理を与えることに成功した．

② 第二種積分方程式に対する Sinc 数値計算法の厳密理論誤差解析：　第二種積分方程式に対する Sinc 数値計算法(Sinc-Nystroem 法，Sinc 選点法) が Rashidinia-Zarebnia (SE 変換の場合) や Muhammad et al (DE 変換の場合) によって提案され，非常に高精度であることが数値実験を通して示され，誤差の理論解析も行われてきた．しかしながら，それらの理論においては (i)未知関数に対する仮定，(ii)積分方程式を離散化して得られる線形方程式系に関する仮定　が含まれており，厳密な意味での理論解析とは言い難い面があった．これに対して，本研究ではこれらの仮定を必要としない厳密な誤差評価を与えた．

(2) 常微分方程式の数値解法

① 特異摂動２点境界値問題に対する DE-Sinc 法：特異摂動２点境界値問題に対して，Stenger 等によって Sinc 法が提案され，その誤差が exp(-c√n)のオーダーであることが示されていた．本研究では，変数変換を DE 変換に代えることによって，誤差のオーダーが exp(-cn/log(n))に改良できること数値実験を通して示した．従来の数値計算法では解が端点特異性を持つ場合，その性能が極端に落ちるが，本方法ではそのような性能の劣化は起きない．

② 常微分方程式の初期値問題に対する様々な Sinc 数値計算法の比較検討：　常微分方程式の初期値問題に対する Sinc 数値計算法として様々なものが提案されたきた（Carlson et al.，Stenger，Nurmuhammad et al.による)．本研究においても，新たな Sinc 数値計算法を提案し，数値実験を通して，その比較検討を行った．結果，DE-Sinc 法に基づく方法が高精度であることが検証された．

(3) 1 次元 Poisson 方程式に対する Sinc 法の准最適性

Poisson 方程式に対する Sinc 数値計算法および誤差解析は Stenger によって確立されている．これた対して，我々は 1 次元の場合ではあるが，この誤差が准最適であることを証明した．

(4) Sinc 法の基礎理論

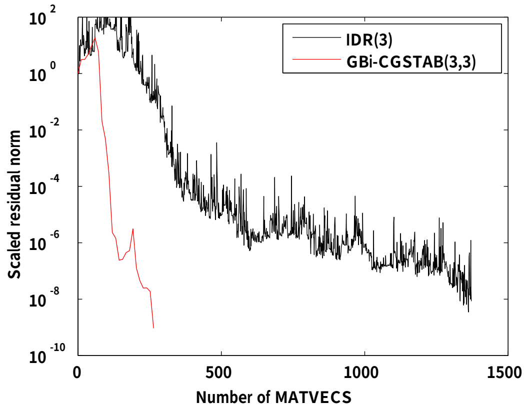
① DE-Sinc 関数近似法や DE 積分公式が有効になる関数族の明確化：従来，Sinc 数値計算法においては，SE 変数変換を用いた方法に関しては，その手法が有効となる関数族が Stenger 等にとって明確にされていた．これに対して，DE 変換を用いた方法に関しては，これまで明確とは言えない状況が続いていた．これに対して，本研究では，DE-Sinc 関数近似法や DE 積分公式が有効，つまり，誤差が exp(-cn/log(n))のオーダーで減衰する関数族を明確にした．

② Sinc-Gauss 核をもつサンプリング公式の複素関数論に基づく誤差評価： Sinc 数値計算法の基礎は Sinc 関数近似(Sinc サンプリング公式)である．これに対して，最近，Sinc 関数を Gauss 関数を用いて局所化した核を用いるサンプリング公式が Qian 等によって提案され，帯域制限された関数族に対しては，Fourier 解析を用いた精緻な誤差解析が与えられていた．これに対して，我々は複素解析を用いた誤差解析手法により，Qian 等の結果を拡張することに成功した．近い将来，この理論に基づいて，「Sinc 数値計算法」に替わる「Sinc-Gauss 数値計算法」が確立されることが期待される．

(5) 大規模線形方程式の数値解法

① 線形方程式系の数値解法 GIDR(s,L)法の提案： 偏微分方程式に Sinc 法を適用する場合，大規模な疎な係数行列をもつ線形方程式系を解く必要が生じる．2008 年に，線形方程式系の数値解法として非常に性能のよい IDR(s)という方法が提案された，しかしながら，係数行列が歪対称に近い場合には性能が極端に落ちることも報告されていた．我々は安定化多項式の次数を上げて，これに対処できる GIDR(s,L)を提案し，数々の数値実験によってその有効性を実証した．その後，GIDR(s,L)の導出を，理解し易いクリロフ部分空間法の枠組みに変更し，名前も GBi-CGSTAB(s,L)法とした．下図に IDR(s)法と GBi-CGSTAB(s,L)法との残差履歴を示す．GBi-CGSTAB(s,L)法の優位性が見て取れる．

② GBi-CGSTAB(s,L) 法の改良： GBi-CGSTAB(s,L)法は，s，L が大きい場合には偽収束(アルゴリズムが生成する残差は小さいにも関わらず，真の残差は小さくない状況）が起こることが分かってきた．そこで，IDR(s)法において偽収束を防ぐ手法として櫻井等によって提案された手法を我々の場合に拡張し，数値実験を通して偽収束を防ぐことができることを示した．



発表文献

5．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 10 件）

① T.Okayama, T.Matsuo M.Sugihara, Improvement of a Sinc-collocation method for Fredholm integral equations of the second kind, BIT Numerical Mathematics, 査読有，印刷中．

② 岡山友昭，松尾宇泰，杉原正顯，第二種積分方程式に対するＳｉｎｃ選点法の改良とその理論解析，日本応用数理学会論文誌，査読有，Vol.20, 2010, pp.71－113.

③ M.Tanio, M.Sugihara, GBi-CGSTAB(s,L): IDR(s) with higher-order stabilization polynomials, Journal of Computational and Applied Mathematics, 査読有，Vol.235, 2010, pp.765－784.

④ T. Sogabe, M. Sugihara, S.-L. Zhang: An extension of the conjugate residual method to nonsymmetric linear systems" Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol.226, 2009, pp. 103－113.

⑤ K. Tanaka, M. Sugihara, K. Murota, Function classes for successful DE-Sinc approximations, Mathemtics of Computation, Vol.78, 2009, pp. 1553－1571.

⑥ K. Tanaka, M. Sugihara, K. Murota, M. Mori, Function classes for double exponential integration formula, Numerische Mathematik, Vol.111, 2009,

pp. 631－655.

⑦ M. Mori, A. Nurumuhammad, M. Muhammad, DE-Sinc Method for Second Order Singularly Perturbed Boundary Value Problems" Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol.26, 2009, pp. 41－63.

⑧ M. Mori, A. Nurmuhammad, T. Murai. Numerical Solution of Volterra Integ ral Equations with Weekly Singular Kernel Based on the DE-Sinc method, Japan Journal of Industrial and Appl ied Mathematics, 査読有, Vol.25, 200 8, pp.165－183.

⑨ K. Tanaka, M. Sugihara, K. Murota, Complex-Analysis Approach to the Sinc-Gauss Sampling Formula, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 査読有, Vol.25, 2008, pp.209－231.

⑩ A Nurumuhammad, M. Mori, M. Muhammad, Galerkin method based on the DE transformation for the boundary value problem of fourth-order ODE, Journal of Computational and Applied Mathematics, 査読有, Vol.206, 2007, pp.17－26.

〔学会発表〕(計　6　件)

① 塚田健, 深堀康紀, 谷尾真明, 杉原正顯, 自動残差修正機能付きＧＢｉ-ＣＧＳＴＡＢ（ｓ, L）法, ＲＩＭＳ研究集会「科学技術計算アルゴリズムの数理的基盤と展開」, 2010 年 10 月 20 日, 京都大学数理解析研究所.

② M. Sugihara, M. Tanio, GIDR(s,l): IDR (s) with Higher-Degree Stabilization Polynomials, SIAM Conference on Applied Linear Algebra, 2009 年 10 月 28 日, Monterey, California (USA).

③ T.Okayama, T.Matsuo, M.Sugihara, Modified Sinc-collocation methods for Volterra integral equations of the second kind and their theoretical analysis, The 14th International Congress on Computational and Applied Mathematics, 2009 年 10 月 2 日, Lara, Antalya (Turkey).

④ 谷尾真明, 杉原正顯, ＧＩＤＲ（ｓ, L）: generalized IDR(s), 日本応用数理学会年会, 2008 年 9 月 19 日, 東京大学柏キャンパス.

⑤ T.Okayama, T.Matsuo, M.Sugihara, Sinc-collocation methods for weakly singular Fredholm integral equations of the second kind, The 13th International Congress on Computational and Applied Mathematics, 2008 年 7 月 11 日, Ghent (Belgium).

⑥ 岡山友昭, 松尾宇泰, 杉原正顯, 弱特異な第二種積分方程式に対するSinc数値計算の理論解析, 日本応用数理学会年会, 2007 年 9 月 17 日, 北海道大学.

〔図書〕(計１件)

① 杉原正顯, 室田一雄, 岩波書店,『線形計算の数理』, 2009 年, 377 ページ.

６．研究組織

(1) 研究代表者

杉原　正顯　　(SUGIHARA　MASAAKI)

東京大学・大学院情報理工学系研究科・教授

研究者番号：８０１５４４８３

(2) 研究分担者

(　　)

研究者番号：

(3) 連携研究者

森　正武　　　(MORI　MASATAKE)

東京電機大学・理工学部・教授 (H19 まで)

研究者番号：２００１０９３６

(H19：研究分担者)