

研究種目： 基盤研究 (C)
研究期間： 2007 ~ 2009
課題番号： 19560063
研究課題名 (和文) 多項式計画問題とその拡張に対する効率的かつ頑健な解法に関する研究
研究課題名 (英文) An Efficient and Numerically Robust Method for Polynomial Optimization Problems and their Extensions
研究代表者 村松 正和 (Masakazu Muramatsu)
電気通信学部・電気通信学部・教授
研究者番号： 70266071

研究成果の概要 (和文)：

多項式計画問題および対称錐上の多項式計画問題に対する半正定値計画緩和の研究を行った。特に多項式の疎性や等式条件を利用して、半正定値計画緩和の問題のサイズを劇的に小さくできることを示した。この手法を利用したソフトウェア、SparsePOP を開発し、公開した。SparsePOP により、これまでは解けなかったような多数の変数を持つ多項式計画問題を解く事ができるようになった。

研究成果の概要 (英文)：

We studied the semidefinite programming (SDP) relaxation method for polynomial optimization problems (POPs) and POPs over symmetric cones. For POPs having sparsity in their constructing polynomials or equalities in their constraints, we propose new methods to reduce the size of the SDP relaxation. We implemented our method into a MATLAB software, SparsePOP. SparsePOP can solve large sized problems that could not be solved otherwise.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野： 工学

科研費の分科・細目： 工学基礎

キーワード： 多項式計画、半正定値計画、大域的最適化

1. 研究開始当初の背景

多項式半正定値計画問題 (Polynomial Optimization Problem; 以下 POP) は, 目的関数および制約に(多変数)多項式を持つ最適化問題である。POP はNP困難な非凸最適化問題であり、その大域的最適解を求める事は一般にたいへん難しい。POP に対しては 2002 年に Lasserre が実代数幾何の手法を用いて, 半正定値計画問題(以下SDP)を用いた緩和法を開発し, それ以降, これに関して活発に研究が行われている。SDP は半正定値行列を変数とする凸計画問題であり, 主双対内点法により効率よく解けることが最近では確立されている。フリーのソルバーも何種類も出回っており, これをもって, 「もうすぐ POP は SDP を使って簡単に解ける時代になる」と期待する人たちも当時は大勢いたようだが, 現実はまだそうになっていない。

2. 研究の目的

Lasserre による POP の SDP 緩和を用いると, 緩和次数を上げていくことにより原理的には POP の最適値が得られる。しかし彼の方法には二つの弱点がある。一つは, SDP の変数の数が POP の変数の数および緩和次数に対して指数的に増えるため, SDP のサイズが巨大になって解けなくなってしまうこと, もう一つは POP の SDP 緩和問題が一般的に非常に数値的に悪条件で, 従来のソルバーを使っていては解けない問題があることである。これを克服するために, 本研究では申請時に次の3つの目標を立てた。

- A. 多項式半正定値計画への挑戦
- B. POP の代数的構造および疎性を利用した

SDP の縮小および緩和の強化

C. SDP 緩和問題の数値的不安定性の原因究明とその対策

3. 研究の方法

研究の方法としては, 次の二つが挙げられる。一つは, POP における代数的構造の探求である。これは, POP の代数的構造を掘り下げる事により, 理論的な性質を打ち立てるもので, 上記の A と B に関連する。もう一つは POP の実用的解法の開発である。こちらは上記の目的の中では, B と C に関して使われる。

4. 研究成果

上記の3つの目標に関して得られた結果を以下にまとめる。

A. 多項式半正定値計画への挑戦

論文 2 と 6 がこの目標に対する結果である。ここでは, 対称錐上の多項式計画問題を研究テーマに据え, これに対する半正定値計画緩和を提案した。また, この半正定値緩和問題の最適値が, ある条件の下で, 緩和次数を無限大に持って行くとともに問題の最適値へ収束する事を証明した。

B. POP の代数的構造および疎性を利用した SDP の縮小および緩和の強化

論文 1, 3 がこれに当たる。論文 1 は, POP の SDP 緩和が元問題のアフィン変換に関して不変である事を示したものである。また 3 は, 元問題が等式条件を含む場合に, 緩和を強くする事を提案するものである。

C. SDP 緩和問題の数値的不安定性の原因究明とその対策

この目標に対しては、確かに達成が不十分であった。論文4、5が一応該当するが、論文4はソフトウェアを発表したもので、むしろBに関する結果と言えるかもしれない。論文5はSDPの特殊ケースである2次錐計画(SOCP)について、新たな解法を提案したものである。

目標A、Bについては、相応の論文が出ており、ある程度達成されたと考えられるが、目標Cについては、不十分であることは否めない。そこで、この目標については、新たに科学研究費を申請し、2010年度に採用が認められた。既に学会発表においては、いくつかこのテーマで発表を行っている。あと3年間で、この目標をしっかりと追求していく計画である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件)

1. “Invariance under affine transformation in semidefinite programming relaxation for polynomial optimization problems”, Hayato Waki, Masakazu Muramatsu, and Masakazu Kojima, *Pacific Journal of Optimization*, 査読有, 5(2009)297-312.
2. “A Note on Sparse SOS and SDP Relaxations for Polynomial Optimization Problems over Symmetric Cones”, Masakazu Kojima and Masakazu Muramatsu, *Computational Optimization and Applications*, 査読有, 42(2009)31-41.
3. “Equality based contraction of semidefinite programming relaxation in polynomial optimization”, Cong Vo, Masakazu Muramatsu, and Masakazu Kojima, *Journal of Operations Research Society of Japan*, 査読有, 52(2008)111-125.
4. “SparsePOP: a sparse semidefinite programming relaxation of polynomial optimization problems”, Hayato Waki, Hiroshi Sugimoto, Masakazu Kojima and Masakazu Muramatsu, *ACM Transaction of Mathematical Software*, 査読有, 25(2008)15:1-15:3.
5. “Towards a pivoting procedure for a class of second-order cone programming problems having multiple cone constraints”, Masakazu Muramatsu, *Pacific Journal of Optimization*, 査読有, 3(2007)87-98.
6. “An Extension of Sums of Squares Relaxations to Polynomial Optimization Problems over Symmetric Cones”, Masakazu Kojima, and Masakazu Muramatsu, *Mathematical Programming*, 査読有, 110(2007)315-336.

[学会発表] (計 10 件)

(1) 「半正定値計画問題に対する単体法の実装報告」 加藤誉運、田村明久、山崎康史、脇隼人、村松正和、日本オペレーションズ・リサーチ学会秋期研究発表会、2009年9月10日

(2) “Facial Reduction Algorithm and Conic Expansion Algorithm”, Masakazu Muramatsu and Hayato Waki, International Symposium on Mathematical Programming 2009, Chicago, 2009年8月28日

(3) “A Facial Reduction Algorithm for Semidefinite Programming Problems in Polynomial Optimization”, Hayato Waki and Masakazu Muramatsu, International Symposium on Mathematical Programming 2009, Chicago, 2009年8月28日

(4) “A Facial Reduction Approach in Conic Programming”, 村松正和、脇隼人、日本オペレーションズ・リサーチ学会研究部会 SCOPE, 2009年3月18日

(5) 「錐線形計画における錐の面的縮小と正則拡大およびその応用」、村松正和、脇隼人、日本オペレーションズ・リサーチ学会春期研究発表会、2009年3月18日

(6) 「計算と最適化の新展開に向けて」、久野誉人、藤澤克樹、村松正和、日本オペレーションズ・リサーチ学会春期研究発表会、2009年3月17日

(7) “Strange behaviors of interior-point methods for solving semidefinite

programming problems in polynomial optimization”, Masakazu Muramatsu and Hayato Waki, HPOPT 2008, 2008年6月13日

(8) “Semidefinite programming relaxation for polynomial optimization problems”, Masakazu Muramatsu, International Conference on Modeling, Computation and Optimization, 2008年1月9日

[その他]

ホームページ等

<http://jsb.cs.uec.ac.jp/~muramatu/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

村松 正和 (Masakazu Muramatsu)

電気通信大学・電気通信学部・教授

研究者番号：70266071

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者 なし