様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　６月　７日現在

研究種目：基盤研究 (C)
研究期間：2007～2009
課題番号：19560067
研究課題名（和文）　連続Ｅｕｌｅｒ変換を用いた近似超関数の研究

研究課題名（英文）　Study of an approximated distribution using the continuous Euler transformation

研究代表者
大浦　拓哉（OOURA TAKUYA）
京都大学・数理解析研究所・助教
研究者番号：50324710

研究成果の概要（和文）：連続オイラー変換による超関数の近似は機械的に構成が可能であり，かつ線形写像の意味で非常に高精度であることを，理論的および数値実験で明らかにした．そしてその近似手法を用いて，数値不定積分や二次元振動積分の高速高精度計算に成功し，ある種の微分方程式に関する解法へ応用ができることを示した．

研究成果の概要（英文）：We show that the distributions are easily approximated by continuous functions using the continuous Euler transformation, and the linear map of the approximated distribution is high precision. The approximated distribution can be applied to the computation of numerical indefinite integration, two-dimensional oscillatory integration and a certain differential equation.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数値解析
科研費の分科・細目：工学基礎・シミュレーション工学
キーワード：連続オイラー変換，超関数，近似，数値積分法

１．研究開始当初の背景

連続オイラー変換は，収束の遅い，または緩やかに発散するフーリエ積分を速く収束するフーリエ積分に変換するための方法として大浦が 2000 年に考案したものである．この連続オイラー変換を応用することで，今まで計算が困難だった収束の遅いフーリエ積分に対する高速高精度の数値計算が可能になった．

また連続オイラー変換を用いることで，さまざまな超関数を線形写像としての性質を近似的に保った状態で，滑らかな通常の関数

に変換可能であることを 2005 年に大浦が発見した．この連続オイラー変換による超関数の近似は機械的に構成でき，かつ非常に高精度であることが予想されていた．

超関数の近似は，工学的にはデジタルフィルターの設計などで，粗い近似が行われているが，統一した近似方法や近似理論は確立されておらず，ほぼ未開拓の研究分野であった．

大浦は当時，超関数が計算機では扱えないために数値計算が破綻するという計算例を知っていた．そこで，超関数の近似の理論を構築し，計算機で近似的に超関数を扱うことが可能になれば，新たな数値算法が構築できるだろうと予想できた．

２．研究の目的

本研究の目的は，さまざまな超関数に対する高精度かつ応用範囲の広い近似方法を提案するとともに，超関数の近似理論を新たに開拓するものである．

(1) 本研究で明らかにする点を以下に示す．

① 連続オイラー変換による近似超関数の誤差の評価

近似超関数による線型写像は非常に高精度であることがある程度わかっているが，それがどのような場合についてどの程度有効なのかを厳密に調べることは，理論または応用において非常に重要である．

しかし近似超関数の誤差は，超関数の種類と写像する関数の二つに依存し，通常の関数近似の誤差よりも複雑であり，従来の近似理論による評価は使えない．そこで，近似超関数の誤差評価の理論を新たに作成し，誤差評価を行う．

② ある種の線形微分方程式に対する数値解法の導出

非整数階微分や遅延や積分を含むような微分方程式は，超関数を含む単純な積分方程式で表されることに着目する．そして連続オイラー変換を用いて，超関数を連続関数で近似することで様々な数値積分法が利用できるようになり，簡単に解ける積分方程式の問題に置き換えて高精度で解くことができると予想できる．そこで，本方法の有効性についての解析を行う．

(2) 本研究の特色を以下に示す．

① 超関数の滑らかな関数での近似という研究分野の開拓

超関数の近似に関する研究は，国内外でほとんど研究されていないのが現状である．本研究は，さまざまな超関数に対する高精度かつ応用範囲の広い近似方法を提案するとともに，超関数の近似理論を新たに開拓するものである．

② よく知られた既存の数値積分公式の活用

連続オイラー変換により近似された超関数は，実軸近傍で解析的な関数であるので，古くからよく知られた数値積分公式を用いて計算することができる．さらに，そのような数値積分公式の誤差をコントロールする技術も適用可能であり，高性能の数値計算が容易に実現できる．

③ 線形の微分方程式に対する高精度算法の導出

比較的広い範囲の線形の微分方程式に対する高精度かつ高効率の解法が導出できる．

④ さまざまな数値計算への応用

連続オイラー変換による近似超関数は，微分方程式に対する数値解法だけでなく，さまざまな応用が考えられる．たとえば，不定積分の計算やヒルベルト変換の計算など，特異な関数や超関数が現れることで計算が困難だった問題に対して新しい解法を構築できる．

３．研究の方法

具体的な解析等は，以下の手順で行った．

(1) 連続オイラー変換による近似超関数の誤差の評価

理論的解析と計算機による数値実験を組み合わせて解析を行った．これらの解析は，様々な数値計算のテクニックや数学の知識が必要になるため，数値計算や数学の研究者と年に数回の研究打ち合わせを行い，議論を行った．

(2) 近似超関数を含む積分の計算方法についての考察

数値積分法には多くの公式が知られており，数値積分の性能を発揮するためには，超関数の種類や写像する関数の性質によって適切に使い分ける必要がある．本研究では，台形則とガウス型公式と変数変換型公式につい

て性能の解析を行い，適切な使い分けを考察した．とくに，変数変換型公式の代表例である二重指数関数型数値積分公式(DE 公式)と IMT 型公式に関しては，より詳しい解析を行った．また，実際の計算機での積分計算の高速化についても行った．

(3) 連続オイラー変換を用いた線形微分方程式に対する高精度算法の提案

線形の微分方程式で，境界条件も含めて超関数を含む積分方程式に変換できる場合のものを考える．超関数を含む積分方程式は，連続オイラー変換を用いることで，超関数を含む積分は滑らかな関数の積分方程式に近似的に置き換えられる．積分方程式に変換した後の解法は F. Stenger らによる Sinc 近似による一連の解法と同様の手順を用いた．

(4) 連続オイラー変換による近似超関数の応用可能性についての考察

連続オイラー変換による近似超関数には非常に多くの応用が考えられる．応用例として，数値不定積分の高速高精度計算，ある種の微分方程式の高精度計算，ある種の積分変換や積分方程式の高精度計算があげられる．これらの例について本研究がどのくらいの応用上の有効性があるのかを調べた．

４．研究成果

連続オイラー変換による超関数の近似は機械的に構成でき，かつ線形写像の意味で非常に高精度であることを理論的および数値実験で明らかにした．そして，数値不定積分と二次元振動積分の高速高精度計算へ応用できることを示した．この連続オイラー変換による近似超関数の基礎的な研究成果は雑誌論文③で発表した．

近似超関数の応用に関しては，既存の数値積分法を解析して性能を引き出すことが非常に重要になる．そこで，DE 公式と IMT 型公式に対する解析と改良を行った．IMT 型公式はパラメータチューニングをすることで DE 公式と同程度の性能を引き出すことが可能であることを発見し，雑誌論文①で発表した．DE 公式による積分変換の数値算法に関しては，Sinc 近似を応用した高速高精度算法を提案し，雑誌論文②で発表した．DE 公式の計算ルーチンについて，高速化をいくつか行い，雑誌論文④では流体計算への応用を行った．

微分方程式の解法に関しては，線形で境界条件を含めて超関数の積分方程式に置き換えられるものに限定すれば，ある条件のもとで Sinc 近似による方法とほぼ同じになることを明らかにした．この解析は特殊な場合でのみ行った．一般的な解析は，積分方程式の解法の種類と連続オイラー変換の重み関数の組み合わせが膨大になるため，十分にはできなかった．これらの解析は今後の課題である．

また，解析学上の数値計算困難な問題の中には超関数が間接的に関与していて，超関数が計算機で扱えないために計算が破綻するという重要な例がいくつかあることを確認した．そして，超関数を意識して近似を行うことで高性能の新しい算法が得られることをいくつかの例で示し，その効果を確認した．その成果の一部は学会発表②で発表し，Goursat-Hardy 積分の数値計算（戸田積分）への応用を解説し，従来の算法よりも格段に高速高精度であることを示した．今後の展望として本研究をより発展させることで，この種の計算困難な問題に対する解法の確立を考えている．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 4 件）

① M. Shōji, H. Okamoto, <u>T. Ooura</u>, Particle trajectories around a running cylinder or a sphere, Fluid Dynamics Research, 査読有, 42, 2010, 025506

② <u>大浦拓哉</u>、連続オイラー変換による超関数の直接計算、雑誌『数学』岩波書店、査読有、61 巻 3 号、2009、293－306

③ <u>大浦拓哉</u>、二重指数関数型変換を用いた様々な積分変換の計算法、日本応用数理学会論文誌、査読有、Vol.19、No.1、2009、73－79

④ <u>T. Ooura</u>, An IMT-type quadrature formula with the same asymptotic performance as the DE formula, J. Comput. Appl. Math., 査読有, 213, 2008, 232－239

〔学会発表〕（計 2 件）

① <u>大浦拓哉</u>、戸田積分の DE 公式による超高

精度計算、第38回数値解析シンポジウム（日本応用数理学会主催）、2009年6月16日、静岡県熱川ハイツ

② 大浦拓哉、連続オイラー変換による超関数の直接計算、日本数学会2007年度秋季総合分科会「応用数学スペシャルセッション」、2007年9月23日、東北大学

〔図書〕（計0件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計0件）

〔その他〕
ホームページ等
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ooura/profile-j.html

６．研究組織
(1)研究代表者
大浦　拓哉（OOURA TAKUYA）
京都大学・数理解析研究所・助教
研究者番号：50324710