様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年５月１０日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007～2009
課題番号：19560796
研究課題名（和文）　船舶流体力学における非自己随伴方程式系の固有値問題とその最適離散化法への応用
研究課題名（英文）Eigenvalue problems of non self-adjoint equation in the field of the ship hydrodynamics and its application to the optimum discretization method

研究代表者
　松村　清重　(MATSUMURA KIYOSHIGE)
　大阪大学・工学研究科・准教授
　研究者番号：10135668

研究成果の概要（和文）：
　粘性流体に場合として、境界層と伴流に対する積分方程式を核の固有関数展開の立場から検討した。核関数はエルミート多項式によって展開でき、積分方程式は無限連立の積分関係式に離散化できた。その関係式は線型化された境界層方程式の随伴固有関数で重みづけられた重率残差方程式に一致する。解法として座標歪曲法を提案し、良好な結果が得られた。また、歪曲関数に関する変分原理も存在する。波動場については、エアリー関数属の急変動性に着目した新しい変数分離法を提案し、固有関数ではないが自由波を表す２つの表現を見いだした。

研究成果の概要（英文）：
　On the viscous fluid, Kármán-Millikan's integral equations on the momentum loss in boundary layer and wake field were investigated from the viewpoint of the eigenfunction expansion. The kernel function were expanded by using the eigenfunction of the linearlized boundary layer equation. As a result, the integral equation wase discretized to infinite number of integral relations. Those ware equivalent to the Weighted residual equations weighted by the adjoint eigenfunctions. Coordinate straining method was developed and good results were obtained. Variational principle on the coordinate straining function was shown. On the wave field, new method of the separation of independent variables was presented. The free wave behind a ship was represented by the two Airy's functions.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２００８年度	800,000	240,000	1,040,000
２００９年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総　計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：工学
科研費の分科・細目：総合工学・船舶海洋工学
キーワード：非自己随伴問題、積分方程式、固有関数、重率残差法、変分原理、粘性流体、エアリー関数、急変動関数

１．研究開始当初の背景

船舶流体力学の問題を解くことは、特に粘性流体の場合、Navie-Stokes 方程式（以下 N-S 方程式と呼ぶ）を解くことが主眼になる。数値流体力学（CFD）の発展により、従来に比べてその環境が整ってきたが、その一方で、解析学的流体力学の研究者も減り、CFD のブラックボックス的使用が心配されるところである。

このような社会状況を考えると、外部流れについても、簡単な公式運用、直感に訴えやすい方程式の解法を準備する必要がある。それが CFD とも調和するものであれば、CFD の品質をも改善できることになる。これが本研究で最終目的とする方程式の最適離散化法である。場合によっては未知数１つの１分割で正解が得られ、直感に訴えることができる。分割数を増やせば、CFD 的使用法になる。このようなことを本当に可能する一つの方法は、固有関数の概念を用いて、誤差について平均誤差の考え方を導入することであり、そのためには方程式系を積分方程式にすれば考えやすい。

当該研究者は翼理論方程式（松村他 2003）に自己随伴変分原理とその汎関数、固有関数を導出しており、その最適離散化法についても結果を得ている。同様のことはオゼーン方程式に関する積分方程式（松村他 2005）に対しても得られており、さらに複雑な次のステップたる境界層方程式、N-S 方程式へと進むに十分値する結果となっている。

２．研究の目的

以上の背景の下に　波、渦など、粘性の有無に関わらず、非自己随伴積分方程式の固有関数、ないしは近似固有関数の立場から見直してみようというのが立場である。

本論の目的は、N-S 方程式のような非自己随伴方程式（非対称性の方程式）に対して、

1) 方程式に付随する同次方程式とは如何なるものかを明らかにし、固有値問題に対して、固有値と固有関数を明らかにすること。
2) その問題に関する随伴変分原理を明らかにし、ガウス型離散積分法による打ち切り誤差のない最適離散化法を得ること。
3) 最終的に、製品企画や学生が簡単な公式運用で、直感に訴えやすい方程式の解法を提示することを目標とする。

３．研究の方法

本研究では、

1) オゼーン近似を参考に N-S 方程式を CFD で用いられる程度の線形積分方程式に帰着すること。
2) 線形積分方程式に対する自己随伴変分原理とその汎関数を示すこと。
3) 汎関数の作用素から、固有関数を示すこと。
4) 得られた固有関数からガウス型積分公式を得、最適離散化法を構築すること。ないしは固有関数から随伴離散直交系を作成し、同様のことを行うこと。

以上の４点を念頭に置き、目的を達成する。

４．研究成果

本研究では粘性流体に対しては境界層とそれに引き続く伴流に対して線形化方程式の固有関数を用いて、離散化法を提案した。波流れに対しては固有関数ではないが、自由波を表す２つのエアリー関数属による表現を見いだした。ここでは３つの観点から報告する。

１）２次元層流境界層に関する積分方程式の固有関数展開法について

２次元層流境界層方程式に対して、運動量損失 M を未知関数とする Kármán-Millikan の積分方程式

$$M(\phi,\psi)+\int_0^{\phi}\frac{ds}{\sqrt{s}}\int_0^{\infty}K_{-}(\phi,\psi;s,t)\times\left(1-\sqrt{1-\frac{M(s,t)}{U^2(s)}}\right)M_{\psi\psi}(s,t)dt$$
$$=M_{ext}(\phi,\psi)$$

ここに

$$K_{-}(\phi,\psi;s,t)\equiv\sqrt{s}G_{-}(\phi,\psi;s,t)$$
$$\equiv\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{s}{\phi-s}}\left\{\exp\left[-\frac{(\psi-t)^2}{4(\phi-s)}\right]-\exp\left[-\frac{(\psi+t)^2}{4(\phi-s)}\right]\right\}$$

を固有関数展開の観点から考察した。その結果、次のことが分かった。

①Kármán-Millikan の積分核は奇数次のエルミート多項式により展開でき、次の１重級数となる。

$$K_{-}(\phi,\psi;s,t)$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{s}{\phi}\right)^{m+1}\exp\left[-\tfrac{1}{4}\Psi^2\right]\tilde{H}_{2m+1}\left[\frac{\Psi}{\sqrt{2}}\right]\tilde{H}_{2m+1}\left[\frac{H}{\sqrt{2}}\right]$$

ここに現れた変数 Ψ は境界層方程式で用いられる自己相似変数となる。このとき、積分方程式は

$$M(\phi,\psi)$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty}\exp\left[-\tfrac{1}{4}\Psi^2\right]\tilde{H}_{2m+1}\left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Psi\right]\times\int_0^{\phi}\left(\int_0^{\infty}\tilde{H}_{2m+1}\left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}H\right]\left(1-\sqrt{1-\frac{M(s,t)}{U^2(s)}}\right)M_{\psi\psi}(s,t)dt\times\left(\frac{s}{\phi}\right)^{m+1}\frac{ds}{\sqrt{s}}\right)$$
$$=M_{ext}(\phi,\psi)$$

となる。

②自己相似流れの場合について無限連立の非線形積分関係式を導出し、次の運動量損失積分を用いた離散化法を提案した。

$$0=\int_0^\infty \begin{bmatrix} \tilde{H}_{2m+1}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi\right] \\ \times\left[\begin{array}{l}\hat{M}(\Psi)-\hat{M}_{ext}(\Psi) \\ +\dfrac{1}{m+1+\beta}\left(1-\sqrt{1-\dfrac{\hat{M}(\Psi)}{\hat{M}(0)}}\right)\hat{M}^{(2)}(\Psi)\end{array}\right]\end{bmatrix} d\Psi$$

$$\text{for } m=0,1,\cdots,\infty$$

③離散関係式は奇数次エルミート多項式で重みづけた境界層方程式の重率残差方程式と同等であることが分かった。実際、$\hat{M}$ と $\hat{M}_{ext}$ は偏微分方程式で記すと、

$$U^2\hat{M}_{\Psi\Psi}+\tfrac{1}{2}\Psi U^2\hat{M}_{\Psi}-\phi(U^2\hat{M})_\phi$$
$$=\left(1-\sqrt{1-\hat{M}}\right)\hat{M}_{\Psi\Psi}U^2$$
$$U^2\hat{M}_{ext\Psi\Psi}+\tfrac{1}{2}\Psi U^2\hat{M}_{ext\Psi}-\phi(U^2\hat{M}_{ext})_\phi=0$$

を満足する必要がある。$\hat{M}$ と既知関数 $\hat{M}_{ext}$ との差を考え、

$$M_{dif}(\phi,\Psi)\equiv U^2(\phi)\cdot\left\{\hat{M}(\phi,\Psi)-\hat{M}_{ext}(\phi,\Psi)\right\}$$

と定義すると、$\hat{M}$ は

$$L[M_{dif}]=\left(1-\sqrt{1-\hat{M}}\right)\hat{M}_{\Psi\Psi}U^2 \qquad (1)$$

の偏微分方程式を満足する必要がある。ここに

$$L[M_{dif}]\equiv e^{-\frac{1}{4}\Psi^2}\frac{\partial}{\partial\Psi}\left(e^{\frac{1}{4}\Psi^2}\frac{\partial M_{dif}}{\partial\Psi}\right)-\phi\frac{\partial M_{dif}}{\partial\phi}$$

である。これに対して随伴作用素 L^* を

$$L^*[g_m^*]\equiv e^{-\frac{1}{4}\Psi^2}\frac{\partial}{\partial\Psi}\left(e^{\frac{1}{4}\Psi^2}\frac{\partial g_m^*}{\partial\Psi}\right)+\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\phi g_m^*\right)$$

とし、

$$\left.\begin{array}{l}L^*[g_m^*]=0 \\ g_m^*(\phi,0)=0 \\ g_m^*(\phi,\Psi)\sim 0 \quad \text{as } \Psi\to\infty\end{array}\right\}$$

を満足する g_m^* を随伴固有関数と呼ぶ。m が非負整数である限り

$$g_m^*(\phi,\Psi)=\phi^m\cdot e^{-\frac{1}{4}\Psi^2}\tilde{H}_{2m+1}(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Psi)$$

となる。本論では直接用いることはないが、随伴固有関数に対して(重複)固有関数とは

$$\left.\begin{array}{l}L[g_m]=0 \\ g_m(\phi,0)=0 \\ g_m(\phi,\infty)=0\end{array}\right\}$$

を満足する解であり、

$$g_m(\phi,\Psi)=\phi^{-(m+1)}e^{-\frac{1}{4}\Psi^2}\tilde{H}_{2m+1}(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Psi)$$

となる。

(1)式に重み付き2重積分を施し、次式を要請する。

$$0=\int_0^\infty d\Psi\int_0^\phi \left\{\begin{array}{l}e^{+\frac{1}{4}\Psi^2}g_m^*(\phi,\Psi) \\ \times\left\{\begin{array}{l}L[M_{dif}] \\ -\left(1-\sqrt{1-\hat{M}}\right)\hat{M}_{\Psi\Psi}U^2\end{array}\right.\end{array}\right\}d\phi$$

$$\text{for } m=0,1,\cdots,\infty$$

ここで次の一般化されたグリーンの定理

$$\int_0^\infty d\Psi\int_0^\phi\left\{e^{\frac{1}{4}\Psi^2}g_m^*\cdot L[M_{dif}]-e^{\frac{1}{4}\Psi^2}M_{dif}\cdot L^*[g_m^*]\right\}d\phi$$
$$=\int_0^\phi\left[e^{\frac{1}{4}\Psi^2}g_m^*\frac{\partial M_{dif}}{\partial\Psi}-e^{\frac{1}{4}\Psi^2}\frac{\partial g_m^*}{\partial\Psi}M_{dif}\right]_{\Psi=0}^\infty d\phi$$
$$-\int_0^\infty\left[e^{\frac{1}{4}\Psi^2}\phi g_m^* M_{dif}\right]_{\phi=0}^\phi d\Psi$$

を適用すれば

$$-\int_0^\infty e^{\frac{1}{4}\Psi^2}\phi g_m^*\cdot M_{dif}(\phi,\Psi)d\Psi$$
$$=\int_0^\infty d\Psi\int_0^\phi e^{\frac{1}{4}\Psi^2}g_m^*\cdot\left(1-\sqrt{1-\hat{M}}\right)\hat{M}_{\Psi\Psi}U^2 d\phi \qquad (2)$$
$$\text{for } m=0,1,\cdots,\infty$$

を得る。これは②で得た離散関係式に他ならない。

④外層近似解と真の解の差が僅かであることが分かったので、離散化された積分関係式の数値解法として、その差を埋めるべく次の座標歪曲法を提案した。そこでは真の解を

$$M_0(\Psi)\equiv E\left[\Gamma(\Psi)\right]$$

と表現し、$\Gamma(\Psi)$ は歪曲関数と呼ぶずらしを実行する未知関数である。このとき歪曲関数 $\Gamma(\Psi)$ に関する連立方程式

$$0=\int_0^\infty\begin{bmatrix}\tilde{H}_{2m+1}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi\right] \\ \times\left[\begin{array}{l}(m+1)\{E(\Gamma)-E(\Psi)\} \\ +\left(1-\sqrt{1-E(\Gamma)}\right)E'(\Gamma)\left[\Gamma''-\dfrac{1}{2}\Gamma\cdot(\Gamma')^2\right]\end{array}\right]\end{bmatrix}d\Psi$$
$$\text{for } m=0,1,\cdots,\infty$$

に従う必要がある。この手法は逐次近似法の難点を回避でき、

$$0\approx\int_0^\infty\begin{bmatrix}E'(\Psi)\tilde{H}_{2m+1}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi\right] \\ \times\left[\begin{array}{l}(m+1)\tilde{\Gamma}(\Psi) \\ -\frac{1}{2}\Psi\left(1-\sqrt{1-E(\Psi)}\right)\end{array}\right]\end{bmatrix}d\Psi \qquad (3)$$
$$\text{for } m=0,1,\cdots,\infty$$

のように歪曲関数を線形化しても良好な結果が得られることが分かった。

⑤歪曲関数に関する汎関数

$$\Pi[\Gamma_E]\equiv\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{+\frac{1}{4}\Psi^2}\left\{\left(\frac{d\Gamma_E}{d\Psi}\right)^2+\beta\Gamma_E{}^2\right\}d\Psi$$
$$-\int_0^\infty\tilde{\Gamma}_E\cdot e^{+\frac{1}{4}\Psi^2}\left\{1-\sqrt{1-E(\Psi)}\right\}E''(\Psi)d\Psi$$
$$\text{under } \Gamma_E(0)=0$$
$$\Gamma_E(\Psi)\equiv -E'(\Psi)\tilde{\Gamma}(\Psi)$$

の最小値問題の解は、提案した(3)式の解となる。このように粘性流体の場合でも適切な変関数を選べば変分原理が存在することが分かった。

2)伴流を含む層流境界層方程式の積分方程式化とその固有関数展開法

2次元層流境界層方程式に対して、それと

同等の Kármán-Millikan の積分方程式を固有関数展開の観点から考察した。その結果、次のことが分かった。
①Kármán-Millikan の積分核は境界層部では奇数次の、伴流部では偶数次のエルミート多項式により展開できる。両者共に、境界層方程式に現れる自己相似変数で記述できる。伴流部の積分方程式は具体的には次の形になる。

$$M_w(\phi,\psi)+\int_1^{\phi}\frac{ds}{\sqrt{s}}\int_0^{\infty}\begin{array}{l}K_+(\phi,\psi;s,t)\\ \times\left(1-\sqrt{1-M_w(s,t)}\right)\dfrac{\partial^2 M_w}{\partial\psi^2}(s,t)dt\end{array}$$
$$=\tilde{E}_w(\phi,\psi)$$

ここに

$$K_+(\phi,\psi;s,t)$$
$$\equiv\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{s}{\phi-s}}\left\{\exp\left[-\frac{(\psi-t)^2}{4(\phi-s)}\right]+\exp\left[-\frac{(\psi+t)^2}{4(\phi-s)}\right]\right\}$$
$$\tilde{E}_w(\phi,\psi)$$
$$=\int_0^{\infty}\frac{M(1,t)}{2\sqrt{\pi(\phi-1)}}\left\{\exp\left[-\frac{(\psi-t)^2}{4(\phi-1)}\right]+\exp\left[-\frac{(\psi+t)^2}{4(\phi-1)}\right]\right\}dt$$

である。また、核は

$$K_+(\phi,\psi;s,t)$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{s}{\phi}\right)^m\exp\left[-\tfrac{1}{4}\Psi^2\right]\tilde{H}_{2m}\left[\frac{\Psi}{\sqrt{2}}\right]\tilde{H}_{2m}\left[\frac{H}{\sqrt{2}}\right]$$

と展開できる。
②伴流部でも無限連立の非線形積分関係式を導出した。しかし、伴流部では自己相似解が存在しないため、２重積分の関係式に留まる。
③伴流部でも外層近似解を導出し、２変数の座標歪曲法を提案した。外層近似解は

$$E_w(\phi,\Psi)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\phi-1}}\right)}\exp\left[-\tfrac{1}{4}\Psi^2\left(1+\tan^2 t\right)\right]dt$$

となり、伴流中心では、

$$E_w(\phi,0)=\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\phi-1}}\right)$$

となる。歪曲関数を線形化しても、伴流が加速され良好な結果が得られた。

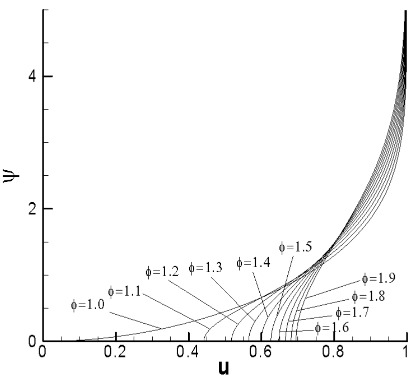

Fig.1 Wake Velocity distributions $u(\phi,\psi)$ calculated on the basis of the outer layer approximation

３）後続自由波の Airy 関数表現

本研究は、定常移動圧力源によって生成される波形の漸近挙動について、Keller の方法に基づいて考察したものである。彼らの提案は元の波高表現

$$\tilde{h}_{\mathrm{free}}=-\int_{-\infty}^{0}\frac{(-s)^3}{\tilde{r}^4}\sin\left(\frac{\kappa_0}{4}\cdot F\right)ds$$
$$F\equiv\frac{s^2}{\tilde{r}}=\frac{s^2}{\sqrt{(\cos\Theta+s)^2+(\sin\Theta)^2}}\equiv F_s(s)$$

を、積分変数の変換により

$$h=\int_{-\infty}^{\infty}\begin{array}{l}(a_0+a_1\mu+\cdots)\\ \times\sin\left\{\tfrac{1}{4}\kappa_0R\left(\mu^3-3\alpha\mu+\beta\right)\right\}d\mu\end{array}$$

のように表し、これをエアリー関数の積分表示に基づき

$$h\approx\frac{2\pi}{(\frac{3}{4}\kappa_0R)^{1/3}}$$
$$\times\left(\begin{array}{l}a_0\sin\left(\tfrac{1}{4}\kappa_0R\beta\right)\cdot\mathrm{Ai}\left(-(\tfrac{3}{4}\kappa_0R)^{2/3}\alpha\right)\\ -\dfrac{a_1}{(\frac{3}{4}\kappa_0)^{1/3}}\cos\left(\tfrac{1}{4}\kappa_0R\beta\right)\cdot\mathrm{Ai}'\left(-(\tfrac{3}{4}\kappa_0R)^{2/3}\alpha\right)\\ +\cdots\end{array}\right)$$

と表すものである。

本研究では具体的に写像関数を示し、被積分関数の振幅部をテーラー展開することにより波形の計算を試みた。その結果、次のことが分かった。
①停留点における位相関数 F の値は２つの関数の和

$$\left.\begin{array}{l}F_1=\beta-\gamma\\ F_2=\beta+\gamma\end{array}\right\}\qquad(4)$$

に分離でき、それぞれ

$$\left.\begin{array}{l}\beta\equiv\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(1+3\sin\Theta)^3(1-\sin\Theta)}{\sin^2\Theta}}\\ \gamma\equiv\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(1-3\sin\Theta)^3(1+\sin\Theta)}{\sin^2\Theta}}\end{array}\right\}$$
$$\text{for }0<\Theta<\Theta_0$$

のように場の方位角 Θ のみで陽に書き表すことができる。この結果はケルビン波表現に関する新しい変数分離解の存在を示すものである。
②幾何学的近似法（WKB 法）の立場から、ケルビン角内における位相関数が満足すべき微分方程式とその非線形解を明らかにした。すなわち速度ポテンシャルを

$$\Phi=x+\phi$$
$$\phi=\mathrm{Re}\left[\exp\left[i\kappa_0S_0(\boldsymbol{x})+iS_1(\boldsymbol{x})+\cdots\right]\right]$$

の形に仮定する。ここに ϕ は自由波のみを表

す速度ポテンシャルである。波数κ_0は

$$\kappa_0 \equiv \frac{1}{Fn^2} \equiv \frac{gL}{U_\infty{}^2} \gg 1$$

と仮定される。位相関数S_0は、

$$S_0 = \tfrac{1}{4} R \cdot F_i(\Theta)$$

と変数分離でき、このときF_iは

$$F_i^2 + \left(\frac{dF_i}{d\Theta}\right)^2 - \cos^4\Theta \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(F_i - \frac{\sin\Theta}{\cos\Theta}\frac{dF_i}{d\Theta_i}\right)^4 = 0$$

$$(i = 1, 2)$$

の常微分方程式を満足すればよい。この方程式は２つの解を持ち、F_1が横波を、F_2が発散波を表す位相関数となる。この解は実際に(４)式となる。また、βとγは

$$0 = \left[\begin{array}{l}\left\{\beta^2 + \left(1 - s^2\right)\left(\dfrac{d\beta}{ds}\right)^2\right\} + \left\{\gamma^2 + \left(1 - s^2\right)\left(\dfrac{d\gamma}{ds}\right)^2\right\} \\ \mp 2\beta\gamma \mp 2\left(1 - s^2\right)\dfrac{d\beta}{ds}\dfrac{d\gamma}{ds}\end{array}\right] - \left\{\frac{\left(1 - s^2\right)}{4}\left[\begin{array}{l}\left(\beta - s\dfrac{d\beta}{ds}\right)^2 + \left(\gamma - s\dfrac{d\gamma}{ds}\right)^2 \\ \mp 2\left(\beta - s\dfrac{d\beta}{ds}\right)\left(\gamma - s\dfrac{d\gamma}{ds}\right)\end{array}\right]\right\}^2 \qquad (5)$$

の関係を満足する。

③Airy 関数を用いた速度ポテンシャルの変数分離解を示した。②の意味でそれが後方波動場に亘る一様近似解となり、Airy 関数を急変動関数として扱えばよいことを示した。実際

$$\left.\begin{array}{l}\xi \equiv \tfrac{1}{4}\kappa_0 R\beta \\ \eta \equiv [\tfrac{3}{4}\kappa_0 R]^{2/3}\alpha\end{array}\right\}$$

と変数を設定し、速度ポテンシャルを

$$\phi \sim C \cdot \exp\left[\tfrac{1}{4}\kappa_0\delta z\right]\left\{\begin{array}{l}\cos(\xi)\dfrac{1}{\sqrt{\eta}}\varphi_{-\frac{1}{6}}(\eta) \\ \mp\sin(\xi)\dfrac{1}{\eta}\varphi_{\frac{1}{6}}(\eta)\end{array}\right\}$$

と仮定する。$\kappa_0 \gg 1$のとき

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_{-1/6}(\eta) \equiv \mathrm{Ai}(-\eta) \sim O\left(\eta^{-1/4}\right) = O\left(\kappa_0{}^{-1/6}\right) \\ -\varphi_{1/6}(\eta) \equiv \mathrm{Ai}'(-\eta) \sim O\left(\eta^{1/4}\right) = O\left(\kappa_0{}^{1/6}\right)\end{array}\right\}$$

の漸近形をもち、さらに微分階数が１階増えるごとに$\kappa_0{}^{1/3}$だけオーダーが下がる。すなわち Airy 関数を急変動関数として扱えばよいことになる。例えばRに関する２階偏導関数は

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\phi}{\partial R^2} &\sim \exp\left[\tfrac{1}{4}\kappa_0\delta z\right]\cos(\xi)\left[\tfrac{1}{4}\kappa_0\right]^2 \\ &\quad \times\frac{1}{\sqrt{\eta}}\left\{-\beta^2\varphi_{-\frac{1}{6}} + \gamma^2\frac{1}{\eta}\frac{d^2\varphi_{-\frac{1}{6}}}{d\eta^2} \mp 2\beta\gamma\frac{1}{\eta}\frac{d\varphi_{\frac{1}{6}}}{d\eta}\right\} \\ &\quad \mp\exp\left[\tfrac{1}{4}\kappa_0\delta z\right]\sin[\xi]\left[\tfrac{1}{4}\kappa_0\right]^2 \\ &\quad \times\frac{1}{\eta}\left\{-\beta^2\varphi_{\frac{1}{6}} + \gamma^2\frac{1}{\eta}\frac{d^2\varphi_{\frac{1}{6}}}{d\eta^2} \pm 2\beta\gamma\frac{d\varphi_{-\frac{1}{6}}}{d\eta}\right\}\end{aligned}$$

と近似できる。微分に伴いη=0 に高次特異点を誘起している。それが見かけ上のことであれば、η=0 は転移点ということになる。ラプラス式および自由表面条件を考えると、(5)式が成り立つため、実際に見かけの特異点であることがわかる。したがって、次の結論を得る。

④急変動性に伴う高次特異性は Airy 関数により解消され、ケルビン角をなす線は転移線と解釈できる。

⑤ケルビン波は２つのエアリー関数で表現でき、速度ポテンシャルと波高の関係は次のようになる。

$$\left.\begin{array}{l}\phi^{(+)} \equiv \exp\left[\tfrac{1}{4}\kappa_0\delta z\right]\left\{\cos\xi\dfrac{\mathrm{Ai}(-\eta)}{\sqrt{\eta}} + \sin\xi\dfrac{\mathrm{Ai}'(-\eta)}{\eta}\right\} \\ \phi^{(-)} = \exp\left[\tfrac{1}{4}\kappa_0\delta z\right]\left\{\cos\xi\dfrac{\mathrm{Ai}(-\eta)}{\sqrt{\eta}} - \sin\xi\dfrac{\mathrm{Ai}'(-\eta)}{\eta}\right\}\end{array}\right\}$$

のそれぞれに対する波高は

$$\left.\begin{array}{l}h^{(+)} \equiv \tfrac{1}{4}\sqrt{1 - s^2}\left\{\begin{array}{l}\left(F_1 - s\dfrac{dF_1}{ds}\right)\sin\xi\dfrac{\mathrm{Ai}(-\eta)}{\sqrt{\eta}} \\ -\left(F_2 - s\dfrac{dF_2}{ds}\right)\cos\xi\dfrac{\mathrm{Ai}'(-\eta)}{\eta}\end{array}\right\} \\ h^{(-)} \equiv \tfrac{1}{4}\sqrt{1 - s^2}\left\{\begin{array}{l}\left(F_1 - s\dfrac{dF_1}{ds}\right)\sin\xi\dfrac{\mathrm{Ai}(-\eta)}{\sqrt{\eta}} \\ +\left(F_2 - s\dfrac{dF_2}{ds}\right)\cos\xi\dfrac{\mathrm{Ai}'(-\eta)}{\eta}\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

となる。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔学会発表〕（計　6 件）

1）後続自由波の Airy 関数表現と波形解析について，　松村清重, 杉森心平, 井口雄太,
日本船舶海洋工学会講演会論文集，第 10K 号，2010. 6. 8（タワーホール船堀）

2）伴流を含む層流境界層方程式の積分方程式化とその固有関数展開法，松村清重, 斎藤良裕, 杉村友生, 岸　一大,
日本船舶海洋工学会講演会論文集，第 9K 号, pp.61-64, 2009. 11. 5（大阪大学）

3）定常移動する圧力源によって生成される自由波の Airy 関数表現について，松村清重, 井口雄太,
日本船舶海洋工学会講演会論文集，第 7K 号, pp. 95-98，2008. 11. 12（大阪大学）

4)Sanada Y., Toda Y. and Hamachi S.: Free Surface Measurement by Reflected Light

Image, ITTC 2008 Fukuoka, 2008.9.17（福岡国際会議場）
5) ２次元層流境界層に関する積分方程式の固有関数展開法について， 松村清重，杉村友生，斎藤良裕，
日本船舶海洋工学会講演会論文集，第 5K 号，pp. 111-114, 2007. 11. 16(大阪大学)
6)濱地佐知子，眞田有吾，村本龍馬： 水面反射像を用いた航走波計測，
日本船舶海洋工学会講演会論文集，第 5 号，pp.115-118， 2007. 11. 16(大阪大学)

６．研究組織

(1)研究代表者
松村　清重　(MATSUMURA KIYOSHIGE)
大阪大学・工学研究科・准教授
研究者番号：10135668

(2)研究分担者
戸田　保幸　(TODA　YASUYUKI)
大阪大学・工学研究科・教授
研究者番号：20172166

眞田　有吾　(SANADA YUUGO)
大阪大学・工学研究科・助教
研究者番号：30467542