様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　３月２７日現在

研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：２００７～２００８
課題番号：１９７３０５３４
研究課題名（和文）　探究的な算数・数学の授業に関する基礎的研究

研究課題名（英文）　Fundamental research on the inquiry-based class of mathematics

研究代表者
和田　信哉（WADA SHINYA）
新潟大学・人文社会・教育科学系・准教授
研究者番号：６０３７２４７１

研究成果の概要：探究的な算数・数学の授業を考案する際の基礎の一つであるアブダクションについて，理論的・実証的に検討した結果，主として次の成果を得た。①表現間の翻訳・変容の際にアブダクションは重要な働きをなす。②数学教育におけるアブダクションの形式化と，それが発見的推論と密接な関係にあること。これらのことから，探究的な算数・数学の授業を分析したりデザインしたりする際の基盤が形成されたといえる。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	500,000	0	500,000
２００８年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,000,000	150,000	1,150,000

研究分野：数学教育学
科研費の分科・細目：教育学・教科教育学
キーワード：数学教育，探究，アブダクション，記号論，翻訳と変容

１．研究開始当初の背景

人間形成を念頭に数学教育を展開するのであれば，バランスのとれた学力観に立たねばならない。そのためには，子どもが主体的に数学的な真理を見極めようと追究する必要がある。このような追究を目指す授業を探究的な算数・数学の授業と呼ぶならば，そのような授業において，数学的知識を創造したり，意味づけたり，活用したりする活動が行われることとなる。そして，そのような活動の中でバランスのとれた学力が形成されると考える。

この探究的な算数・数学の授業では，「推測の段階」と「正当化の段階」を想定する必要がある。「推測の段階」においては，アブダクション（仮説的推論）が重要な働きをなすと考えられるけれども，その数学教育における意義や機能，子どもの認知的様相などが明らかになっているとは言い難いのが現状である。

２．研究の目的

上記の点に鑑み，本研究では，探究的な算数・数学の授業の基礎的研究として，数学教育におけるアブダクションの意義や機能，子どもの認知的様相などを理論的検討及び調

査研究を通して明らかにし，数学教育においてアブダクションを活用するための示唆を得ることを目的とする。

３．研究の方法

上記の目的を達成するために，次の三つの研究内容を設定した。

(1)分析の枠組みとなる記号論の検討

授業分析などの枠組みとして Peirce の記号論を使用することが適切であると考え，文献解釈的方法によって数学教育における記号論のとらえ方を検討する。

(2)授業分析を通したアブダクションの検討

上記の記号論を使用し，非参与観察によって小数の乗法の授業を分析し，実際の授業における子どもの記号のとらえ方についてアブダクションを中心にして検討する。

(3)アブダクションの形式的観点からの検討

文献解釈的方法によって，アブダクションの論理学的な形式と，それと発見的推論との関係を検討する。

４．研究成果

上記の三つの研究内容に即して，研究成果について述べていく。

(1)分析の枠組みとなる記号論の検討

算数・数学は直接目で見ることはできないものを対象としているけれども，記号（表現）を通して，あたかもそれが見えるものであるかのように学習が進められる。つまり，算数・数学の授業では，記号を通してその意味づけがなされるのであるから，記号論はその分析などの有力な枠組みとなる。

また，アブダクションの概念を提起したアメリカの哲学者 Peirce は，記号論の創始者の一人でもある。彼は，人間の認識が記号を通した推論によってなされると考え，その基盤に数学を据えていた。つまり，彼の記号論を検討することによって，算数・数学の授業の分析，さらには数学教育におけるアブダクションの分析などの有力な枠組みを構築することができる。

以上のことから，文献解釈的方法によって，Peirce の記号論を数学教育的に検討した。その結果，次のような成果を得た。

〇数学教育における記号のクラスの精緻化

Peirce の記号の分類は非常に複雑であり，そのまま数学教育に適用するのは困難である。そのため，Peirce の記号の三項関係的なとらえ方（表意体，対象，解釈項）の内，表意体と対象に着目して次のような「数学教育における記号のクラス」を提起した。

① 類似的・性質記号
② 類似的・単一記号
③ 指標的・単一記号
④ 類似的・法則記号
⑤ 指標的・法則記号
⑥ 象徴的・法則記号

そして，小数の乗法における数直線の認識を事例とし，これらのクラスの特徴づけを次のように行った。

① この前記号的な記号を用いた活動が重要であり，その活動のよって解釈者は感覚的に解釈を行っていく。
② 前の活動を参照し,感覚的ではない意図的な解釈を行うけれども，その意味などの解釈は自己中心的なものである。
③ 前の活動を参照し,その活動において暗黙的である記号の意味などを認識してその適用の基準を構築する。
④ 指示対象が活動から数学的対象へと移行し，その意味などを直観的に理解する。
⑤ 数学的対象に関し,その暗黙的な意味などを反省的に理解する。
⑥ 数学的対象に関し，形式的に判断・推論する。

〇意味の発展モデルの構築

上記の数学教育における記号のクラスの順序は，意味の一般化の過程にもなりうる。したがって，そのモデル化を図り，分析などの枠組みとして機能するようにする必要がある。このような目的のため，次のようなモデルを提起した。

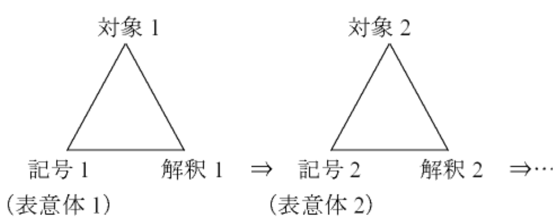

図 1　意味の発展モデル

このモデルによって，記号論的観点から算数・数学の授業の分析などを行うことが可能になる。

(2)授業分析を通したアブダクションの検討

上記の記号論的枠組みを用いた非参与観察による授業の分析を通し，子どものアブダクションの様相を検討する必要がある。なぜ

ならば，その様相が明らかになっているとは言い難いからである。

また，観察の授業は何でもよいわけではなく，数学教育において困難点や問題点が指摘されている内容を扱う授業が望ましい。そこで，第５学年の中で困難な内容の一つとされている小数の乗法の授業を観察することにした。その結果，以下のような成果を得た。

○翻訳と変容

図 1 のモデルをさらに検討すると，「異なる記号間」の記号の変換と「同一記号内」での対象の変換による意味の一般化があることが指摘できる。そこで，前者を「翻訳」，後者を「変容」と呼ぶことにし，この観点から図１を再検討し，図２のような記号論的分析のモデルを提起した。

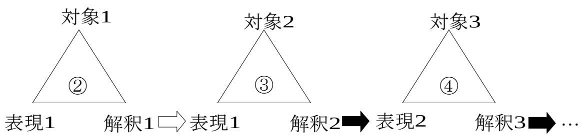

図２　記号論的分析のモデル

図２の白抜き矢印は「変容」を，黒塗り矢印は「翻訳」を表すものである。

このモデルを用い，小数の乗法の単元すべてを観察し，分析した。その結果，この翻訳と変容においてアブダクションが働いていることが見いだされた。つまり，アブダクションを通して意味の一般化が行われていることが見いだされ，「翻訳」と「変容」で働くアブダクションは必然的に異なる質になることが見いだされた。

また，先行研究では「翻訳」に焦点が当てられているけれども，実際の授業においては「変容」が重要であることが指摘された。とりわけ，数学教育における記号のクラスの③から④への移行が困難であるけれども，その移行の際に「変容」が重要な役割を果たしうることが示唆された。

○小数の乗法の指導への示唆

上記の分析を通し，小数の乗法の指導への示唆も得ることができた。

一つは，乗法の意味を拡張させる時間では，計算方法を扱う際には表現間の関連づけを行うために計算方法も数直線を必ず用いて考えさせる必要がある，ということである。これは，望ましい表現間の関連づけをアブダクションの観点から考察して得られた示唆である。

二つは，乗法の意味を拡張する際に数直線を活用するのであれば，その認識を数学教育における記号のクラスの④にまで到達させる必要があり，比例関係を明確に認識させ，その二量がより小さな単位の集合であることを意識させた上で連続的なイメージを持たせることが重要である，ということである。

(3) アブダクションの形式的観点からの検討

上記までの研究は，記号論的観点から行われたものであるが，アブダクションは推論の一つであるから，推論を形式的観点から研究する論理学の観点から検討する必要もある。

そこで，文献解釈的方法によって，形式の観点から数学教育におけるアブダクションについて検討した。その結果，以下の成果を得た。

○数学教育におけるアブダクションの形式化

一般には，アブダクションは図３のように形式化される。図３の「→」は「含意する」の意味である。

$$\begin{array}{c} B \\ A \to B \\ \hline \therefore A \end{array}$$

図３　アブダクションの形式

しかしながら，数学教育における事例を当てはめて検討してみると，大前提Ｂは事実ではなく「現象」であること，仮説Ａは「真であると認められている命題」であること，さらには小前提「Ａ→Ｂ」を導くことが本質的であることが指摘できる。

また，アブダクションと Polya の発見的推論との比較と，上記の形式的観点の指摘とを合わせると，図４のように数学教育におけるアブダクションを形式化できる。

$$\frac{B}{A \to B} \qquad \frac{B}{B \to C} \qquad \frac{B}{B \mid D}$$

図４　数学教育におけるアブダクションの形式

図４の「→」は「含意する」，「｜」は「相容れない」の意味である。

○アブダクションと発見的推論との関係の明確化

アブダクションと Polya の発見的推論とを比較検討すると，発見的推論に先立って働くものがアブダクションであることが指摘できる。つまり，数学教育における発見的推論にアブダクションは欠かすことのできない推論であることが指摘でき，探究的な算数・数学の授業における「推測の段階」で重要で

あることが指摘できる。

(4)総括
以上の成果をまとめると，以下のようになる。

① Peirce の記号論に基づいた記号論的枠組みの構築
② 授業分析による数学教育におけるアブダクションの機能（翻訳と変容）の明確化
③ 数学教育におけるアブダクションの形式化と発見的推論との関係の明確化
④ 小数の乗法の指導への示唆の導出

関連する先行研究では，数学教育におけるアブダクションの意義や機能，形式などが不明確である。本研究で指摘した，とりわけ「翻訳」や「変容」で重要な役割を担っていること，数学教育の観点から形式化を行ったことは，数学教育において非常に有益な結果を与えるものであろう。

ここで，今後の展望についても触れておきたい。本研究で構築した枠組みによって算数・数学の授業におけるアブダクションをとらえることが可能になったが，形式を用いた分析はまだ行っていない。このような分析を行うことで，数学教育におけるアブダクションのさらなる意義や機能などが明確になると考えられる。

また，本研究では小数の乗法の単元だけを事例として取り上げたけれども，中学校や他学年の事例を取り上げることによって，さらなる検討を行う必要がある。

そしてそれらから得られた示唆に基づいて，探究的な算数・数学の授業のデザイン，とりわけ推測の段階とその段階から正当化の段階への接続に焦点を当てたデザインを行う予定である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① 和田信哉，図的表現の認識に関する記号論的考察―小数の乗法における数直線を事例として―，新潟大学教育人間科学部紀要　自然科学編，査読無，10(1)，2007，13-22
(http://hdl.handle.net/10191/6729)

② 和田信哉，小数の乗法の意味に関する記号論的考察，全国数学教育学会誌　数学教育学研究，査読有，14，2008，9-18

③ 和田信哉，数学教育におけるアブダクションの基礎的研究―形式の観点からの検討―，新潟大学教育学部数学教室　数学教育研究，査読無，43(2)，2008，4-10
(http://math.ed.niigata-u.ac.jp/%7Ejour/vol.43/%98a%93c%90M%8D%C6.pdf)

〔学会発表〕（計３件）

① 和田信哉，図的表現の認識に関する記号論的考察，全国数学教育学会，2007 年 6 月 23 日，広島大学

② 和田信哉，小数の乗法の意味に関する記号論的考察，全国数学教育学会，2008 年 1 月 26 日，鳥取県立生涯学習センター

③ 和田信哉，乗数が純小数の乗法の意味に関する記号論的考察，九州数学教育学会，2008 年 3 月 22 日，福岡教育大学

６．研究組織
(1)研究代表者

和田　信哉（WADA SHINYA）
新潟大学・人文社会・教育科学系・准教授
研究者番号：６０３７２４７１