様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　６月　１１日現在

研究種目：若手研究（B）
研究期間：2007～2009
課題番号：19740001
研究課題名（和文）　Rees 代数の Gorenstein 性の研究

研究課題名（英文）　On the Gorensteinness of Rees algebras

研究代表者
居相　真一郎（IAI SHIN-ICHIRO）
北海道教育大学・教育学部・准教授
研究者番号：50333125

研究成果の概要（和文）：本研究の目的はRees代数のGorenstein性の解析にある．主な課題は「基礎環がFLCを持つNoether局所環であるとき，Rees代数がGorenstein環になるようなイデアルを構成せよ」というものある．その成果のひとつとして，基礎環が quasi-Gorenstein であると仮定すれば，川崎の算術的 Macaulay 化のあるイデアルを取ることによって，Gorenstein Rees代数を構成できるという結果を得た．

研究成果の概要（英文）：The purpose of this research is to investigate the Gorensteinness of Rees algebras over Noetherian local rings. The main problem can be stated as follows. “Is there an arithmetic Gorensteinfication in the case where the base ring has finite local cohomology? ” In this research, we showed that a certain ideal of Kawasaki’s arithmetic Macaulayfication gives the Gorenstein Rees algebra whenever the base ring is quasi-Gorenstein.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007年度	800,000	0	800,000
2008年度	600,000	180,000	780,000
2009年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総　計	2,000,000	360,000	2,360,000

研究分野：代数学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：FLC環，Gorenstein環，Rees代数，a standard system of parameters，blow-up代数

１．研究開始当初の背景

私の専門とする可換環論は整数論や代数幾何学と密接に関連した分野であって，組み合わせ論や計算代数・計算幾何学に対して強い応用を持ち，これらの分野の基礎理論としても重要な役割を果たしている．代数幾何学の目的は双有理変換で不変な幾何学的量の発見と解析にあり、その基本手法は

cohomology 論と blow-up であると思われるが，後者を可換環論の言語に翻訳したものがイデアルの Rees 代数（blow-up 代数）とその上の射影幾何学の研究であると考えることができる．

さて，本研究の主役である blow-up 代数を定義したい．A を可換な Noether 環とし t を A 上の不定元とする．環 A 内のイデアル I に対して，

$$R(I):=A[It],$$
$$R'(I):=A[It,t^{-1}],$$
$$G(I):= R'(I)/t^{-1}R'(I)$$

とおき，これらをそれぞれイデアル I の Rees 代数，拡大 Rees 代数，随伴次数環と呼ぶ．スキーム Proj R(I)は，イデアル I を中心とする基礎環 A の blow-up と呼ばれ，blow-up することは特異点解消の主要な方法の一つであるから，Rees 代数 R(I) の環構造の解析は幾何学的にも重要な内容を含む．blow-up 代数の研究の基本理念は，Rees 代数 R(I)の環構造は随伴次数環 G(I)の対応する環構造とその a-不変量の振舞で記述されるということである．つまり， Rees 代数 R(I) が Gorenstein 環になるかを知りたければ，対応する随伴次数環 G(I)の Gorenstein 性を解析しその a-不変量を計算せよというわけである．従って与えられたイデアルの様相から随伴次数環 G(I)の Cohen-Macaulay 性や Gorenstein 性等の環構造を判定する，簡便かつ実際的な方法を見出すことが重要となるが，多くの研究者の努力によって現在では満足すべき判定法が得られている．

さて，このようにこの周辺の研究は国内外の研究者によって多くの論文が発表されており，一見，研究し尽されている様に見えるが，実はそうではなく，本研究の主題である Gorenstein 性に関してはほとんどの論文が，対象とする基礎環 A は Gorenstein であるという仮定を付けており，そうでない場合には手に負えないというのが実状である．

２．研究の目的

本研究は他のいくつかの blow-up 代数との関連の中で，イデアルの Rees 代数の環構造のうち特に Gorenstein 性を主な標的とし，最終的には(大胆ですが願わくは)特異点を段階的に改良する環論的方法の確立を目指すものである．

やはり，Rees 代数のおもしろさは，基礎環 A が“悪い”環でも，適当に A のイデアル I を取ればその Rees 代数 R(I)が“良い”環構造を持つように出来ることだと思う．(蛇足ではあるが，随伴次数環 G(I)に関しては，基礎環 A の“悪さ”は G(I)に遺伝してしまう.）ではここで，イデアルの Rees 代数の Gorenstein 性について，次の池田信の例を見てみたい．

例[池田]
標数 2 である体 k 上の 7 変数べき級数環 $k[[X_1,X_2,X_3,Y_1,Y_2,Y_3,Y_4]]$ を $X_1Y_1+X_2Y_2+X_3Y_3, Y_1Y_2-X_3Y_4, Y_2Y_3-X_1Y_4, Y_1Y_3-X_2Y_4, Y_1^2, Y_2^2, Y_3^2, Y_4^2, Y_1Y_4, Y_2Y_4, Y_3Y_4$ で生成されるイデアルでわった剰余環 A を考える．この基礎環 A は Gorenstein ではないが，A の極大イデアル $m=(X_1,X_2,X_3,Y_1,Y_2,Y_3,Y_4)$ の Rees 代数 R(m)は Gorenstein 環になる．

本研究の目標は，上の例のように（Cohen-Macaulay 環とは限らない）一般の“悪い”基礎環 A に対して，その Rees 代数が Gorenstein 環になるようなイデアル I を見つけたいということである．もちろんこれは大変難しい問題である．ささやかな手掛かりとして，実は，上の例の基礎環 A の中でイデアル $I=(X_2,X_3,Y_1)A$ を見つけてくれば，この Rees 代数 R(I)は Gorenstein になることが解析できている．A の極大イデアル m の高さは 3 であるが，このイデアル I の高さは 2 で，このように高さが低いイデアルの例が見つけられたことは，Gorenstein 性が局所的な性質であるがゆえ，研究の糸口を見つけたように思う．この例を解析することによって，基礎環 A が FLC を持つ環（これは Cohen-Macaulay 環を少しだけ歪めたような環である．つまり極大イデアル以外の素イデアルで局所化すると Cohen-Macaulay になるような環）の時には，Rees 代数 R(I)が Gorenstein 環になるようなイデアル I が構成できるのないかと目論んでいる．即ち，次のことを目標としたい．

目標
A が FLC を持つ Noether 局所環でであると仮定する．このとき Rees 代数 R(I)が Gorenstein 環になるような A のイデアル I を構成する．

特異点の段階的改良という研究の最終目的に照らすとき，この Gorenstein 性の解析の方向で研究を深めることは，より本質的な発展に繋がる可能性があると私は思っている．

３．研究の方法

例として，標数 2 の体 k 上の 7 変数べき級数環 $k[[X_1,X_2,X_3,Y_1,Y_2,Y_3,Y_4]]$を，$X_1Y_1+X_2Y_2+X_3Y_3, Y_1Y_2-X_3Y_4, Y_2Y_3-X_1Y_4, Y_1Y_3-X_2Y_4, Y_1^2, Y_2^2, Y_3^2, Y_4^2, Y_1Y_4, Y_2Y_4, Y_3Y_4$ で生成されるイデアルでわった剰余環 A 内から高さ 2 の

イデアル $I=(X_2,X_3,Y_1)A$ を取ってくれれば，その Rees 代数 R (I)が Gorenstein 環になることが分かっているので，この例を解析することが重要な手掛かりとなると考えられる．この例から得られる示唆として，このイデアル $I=(X_2,X_3,Y_1)A$ は generic には正則列で生成されるもので，局所的にはとても扱いやすくなっている．従って基礎環 A が FLC を持つ場合（極大イデアル以外の素イデアルで局所化すると Cohen-Macaulay になる場合）には，この例を一般化できるのではないかと見通しを立てることができる．

Rees 代数 R(I)の Gorenstein 性の研究が困難な理由として，いわゆる a-不変量公式が対象とする随伴次数環 G(I)に Cohen-Macaulay という条件が付いているためであると考えられる．私は過去の研究からほんの少しだけ Cohen-Macaulay という条件を弱めることが出来ているが，まだまだ不十分である． Rees 代数の Gorenstein 性の研究がうまくいかない場合には，関連する話題として，もう一度 a-不変量公式を洗いなおして改良を加えることも，一見遠回りに見えるようだが，研究を進める方法の一つであると考えている．

また，優良イデアルの分布状況と構造解析からは，基礎環自身の構造に関する豊かな情報が得られることが期待できるが，現段階では，優良イデアルの基礎理論が展開されつつあるのみで，未だ本格的な研究が為されているとは言い難い状況である．Rees 代数の Gorenstein 性研究の進行状況を鑑みながら，この分野の研究にも着手してみたいと考えている．

４．研究成果

最初の成果として，基礎環 A は FLC を持つ Noether 局所環で quasi-Gorenstein であると仮定したとき，川崎の Arithmetic Macaulay 化のあるイデアルを取れば，Gorenstein Rees 代数 R(I)を構成できるという結果を得た．即ち,それは以下の通りである．

定理

基礎環 A は FLC を持つ Noether 局所環で quasi-Gorenstein であると仮定する．基礎環 A の次元を $d\geqq 3$ とし, $x1,\ x2,\ ...,\ xd$ を A の標準的な巴系とする．さらに，x1 の十分大きなべきを取ることによって，$(x2,\ x3,\ ...,\ xd):\ x1 = (x2,\ x3,\ ...,\ xd):\ x1^2 = \cdots$ と仮定してよい．このとき $I=(x2,\ x3,\ \cdots,\ xd):x1$ とおけば，Rees 代数 R(I)は Gorenstein 環となる．

次の成果は，Rees 代数の Gorenstein 性を考察するための基本定理である池田の結果を，本研究に使いやすいように拡張したことである．オリジナルの池田の結果は，Rees 代数の Gorenstein 性が随伴次数環の quasi-Gorenstein 性に対応するように書かれているのだが，今回，拡大 Rees 代数のそれに対応するように書き直すことに成功した．そのことの意義の一つは，冪を取ったイデアルの Rees 代数を考察するときに（拡大 Rees 代数は随伴次数環よりも冪を取ったイデアルと相性が良いということから）池田先生の示されたタイプの対応が使いやすくなったということである．

定理

A は Noether 局所環で quasi-Gorenstein であるとする．I を A のイデアルで，その grade が２以上であると仮定する．このとき次の２条件は同値である．

(1) Rees 代数 R(I)は Gorenstein 環である．
(2)拡大 Rees 代数 R’(I)の正準加群は次数 R’(I)-加群として R’(I) (-1)と同型である．

このように拡張したことによって，冪を取ったイデアルの Rees 代数の Gorenstein 性が，Ratliff-Rush 閉包の作るフィルトレイションの Rees 代数の quasi-Gorenstein 性に対応するということを導くことが出来た．

最後に，基礎環の深さが１である場合について，標準的なパラメータイデアルの冪の Rees 代数の Gorenstein 性について分かったことを述べる．Gorenstein Rees 代数の基本定理である Ikeda の定理において，イデアルの grade が２以上であると仮定されていることからも推測されるように，深さが１である場合は，技術的に武器が少なく，本質的な困難を伴っている．よって，ここを乗り越えれば本質的な発展を示したことになると思われる．その場合の結果を述べたい．即ち次の定理を得た．

定理

基礎環 A の次元 d が２以上であり，A の深さは１であると仮定する．Q を標準的なパラメータイデアルとする．このとき次の２条件は同値である．

(1) Q の d 乗の Rees 代数 R(Q^d)が Gorenstein である．
(2) (i)基礎環 A の type が１である．
 (ii)A の S_2 化 B が quasi-Gorenstein である．
 (iii)等式 l(B/J)=2l(A/J)を満たす．

但し l(*)は*の A-加群としての長さを表し，J は（ここでは詳しく述べないが）ある特別なイデアルである．

この結果は基礎環の次元が２のときには，後藤四郎・下田保博によって２０年ほど前に知られていた．それはとても複雑な計算によ

って証明されており，高次元化は不可能に思えていたが，今回，後藤四郎明治大学教授との共同研究によって，上記の結果のように何とか形にすることが出来た．

この結果の系として，重複度が２の深さ１である d 次元 Buchsbaum 局所環においては，極大イデアルの節減イデアルＱを持ってくれば，Rees 代数 R(Q^d) が Gorenstein になることが導かれる．但しｄは２以上を仮定している．さらに，この結果は Rees 代数の環構造を解析する上で，最も重要な例の一つである Hochster-Roberts の例の一般化になっている．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔学会発表〕（計５件）

（１）居相真一郎, Gorenstein Rees algebras over rings of depth one having finite local cohomology, 第 31 回可換環論シンポジウム, 2009 年 11 月 26 日，大阪

（２）Shin-ichiro Iai, Gorenstein Rees algebras over generalized Cohen-Macaulay rings of depth one, The 4th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, 2009 年２月 18 日，川崎

（３）Shin-ichiro Iai, On Gorenstein Rees algebras , International Conference on Commutative Algebra, 2008 年３月 21 日，横浜

（４）Shin-ichiro Iai, On Gorenstein Rees algebras over rings with finite local cohomology, The 3rd Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, 2007 年 12 月３日，ベトナム国

（５）居相真一郎, The blowup algebras over rings with finite local cohomology, 第２９回可換環論シンポジウム, 2007 年 11 月 20 日，名古屋

６．研究組織

(1) 研究代表者
居相　真一郎（IAI SHIN-ICHIRO）
北海道教育大学・教育学部・准教授
研究者番号：50333125

(2)研究分担者
無

(3)連携研究者
無