

研究種目：若手研究（B）  
 研究期間：2007～2009  
 課題番号：19740002  
 研究課題名（和文） 局所体上の多様体の高次 Chow 群

研究課題名（英文） Higher Chow groups of varieties over local fields

## 研究代表者

山崎 隆雄 (YAMAZAKI TAKAO)  
 東北大学・大学院理学研究科・准教授  
 研究者番号：00312794

研究成果の概要（和文）：多様体の高次 Chow 群は、代数的整数論におけるイデアル類群の広範な一般化であり、数論幾何における主要な研究対象である。多様体が局所体上で定義されている場合、高次元類体論や Brauer-Manin 双対などの数論的な現象に高次 Chow 群が自然と現れる。本研究では、曲線の積の場合に高次元類体論を進展させることができた。また、これまでは完備な多様体に対してしか考察されていなかった Brauer-Manin 双対を開多様体へと拡張し、いくつかの例について示唆的な結果を得た。

研究成果の概要（英文）：Higher Chow groups of varieties is a wide generalization of the ideal class group in the algebraic number theory, and are regarded as a fundamental research theme. When varieties are defined over a local field, it naturally appears in arithmetic context, such as the higher dimensional class field theory and Brauer-Manin pairing. We developed the class field theory for a product of curves, and the Brauer-Manin pairing for open varieties (which was previously considered only for complete varieties).

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,100,000	0	1,100,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	660,000	3,960,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：数論幾何学、高次元類体論、高次 Chow 群、Brauer 群、K-群。

## 1. 研究開始当初の背景

多様体の高次 Chow 群は、代数的整数論におけるイデアル類群の広範な一般化であり、数論幾何における主要な研究対象である。多様体が局所体上で定義されている場合、次のような形で数論的な現象に高次 Chow 群が自

然に現れる：

(1) 高次 Chow 群  $CH_0(X, 1)$  は高次元類体論の相互写像により基本群のアーベル商という数論的な対象と結びつけられる。

(2) Chow 群  $CH_0(X)$  は Brauer-Manin 双対によりブラウアー群という数論的な対

象と結びつけられる。  
ここで「結びつけられる」と述べたのは、両者を結ぶ写像があるというだけの意味であり、その写像がどれくらい同型に近いかということとは一般には分かっていない。ただし、一次元の場合は完全に解明されており、高次元の場合にも特殊な場合（具体的な多様体や、幾何的・数論的な仮定を設けた場合）にもさまざまな研究がなされている。私自身、Mumford 曲線の直積に対する Brauer-Manin 双対を過去に詳しく研究した。

## 2. 研究の目的

上記した「結びつき」の詳細を、より一般のケースに対して明らかにしたいというのはごく自然な問題意識である。この研究では特に、代数曲線の直積の場合を詳しく研究する。（Brauer-Manin 双対と異なり、代数曲線の直積に対して高次元類体論を詳しく調べた研究はこれまでなされていなかった。）

また、そこで得られた結果を基礎体が大域体や高次元局所体の場合に適用することを試みる。特に、代数体上の多様体の高次 Chow 群の構造については代数曲線の場合ですら分かっていないことがとても多い。例えば、代数体上の代数曲線の高次 Chow 群  $CH_0(X, 1)$  は、基礎体から来る部分を除けばねじれ群になるという Bloch による予想があるが、種数ゼロという自明な場合を除けば分かっている例は一つもない。Bloch の予想は Kahn により曲線の直積に対して拡張されているが、このような問題に対してなんらかの貢献をすることを試みる。

## 3. 研究の方法

代数曲線の直積の場合、染川により導入された「半アーベル多様体を係数とする Milnor K-群」を用いて高次 Chow 群を表示することができる。また、高次元類体論の相互写像や Brauer-Manin 双対は、通常の Milnor K-群に対するシンボル写像の類似として記述することができる。通常の Milnor K-群についてはシンボル写像が同型であるという事実（Bloch-加藤予想）が証明された。この類似物を係数付きの Milnor K-群に対して確立し、その応用として上記した目的の結果を得る。

実際に Bloch-加藤予想の類似を証明するためには、半アーベル多様体に対する詳細な知識が必要である。局所体上の多様体に対しては  $p$ -進一意化の理論があり、これが極めて有効に利用できる。そのような理論が存在しない普通の体上で研究を進めるには、Voevodsky により構成されたモチーフの圏が有用な枠組みを与えてくれる。これらの理

論を活用しつつ、上に述べた研究課題に取り組む。

## 4. 研究成果

(1) 代数曲線の直積に対する高次元類体論は、上に述べた方針に沿ってほぼ完全な結果が得られた。さらに、係数付きの Milnor K-群に対する Hasse ノルム定理の類似を証明し、局所体上の結果と併せることで代数体上の代数多様体の高次 Chow 群の構造について新しい結果も得られた。具体的には、代数体上の曲線の積の高次 Chow 群の構造に関する Kahn の予想を部分的に（可除な群を法として）証明することができた。Kahn の予想は、曲線の高次 Chow 群に関する Bloch の予想を曲線の積に拡張したものである。Bloch の予想は、Raskind によって可除な群を法として証明されている。我々の結果と Kahn の予想の関係は、Raskind の結果と Bloch の予想の関係に並行的である。これらの研究成果は論文④として発表した。

(2) 総実体の（通常の）Milnor K-群は Birch-Tate 予想（Wiles の定理）を通じて Dedekind ゼータ関数の特殊値と結びつく。これをトーラス係数付きの Milnor K-群に拡張した予想を定式化し、（ある程度に豊富な例を含む）いくつかの仮定の下で証明した。ここでは、上に述べた係数付きの Milnor K-群に対する Hasse ノルム定理が再び活用された。これらの研究成果は論文③として発表した。また、2007年の代数学シンポジウムで講演し、その講演内容の概説が報告集⑥に収録された。

(3) 係数付き Milnor K-群に対する Bloch-加藤予想の類似は、（単射性については）いつでも成り立つものと信じられてきたが、基礎体を二次元局所体に取り、係数を二つの（分裂していない）トーラスにとると反例が構成できることを発見した。また、これは Beilinson による最近の予想（同氏の有名な予想とは別のもの）への反例も与える。以上は Bielefeld 大学の Spiess 氏との共同研究であり、論文②として発表した。

(4) これまで述べてきた研究はすべて、多様体が完備であるという仮定が本質的であった。実際、開多様体に対しては通常の高次 Chow 群を用いたのではこれらの理論を拡張することは不可能であることが簡単に分かる。しかし、Suslin により導入された代数的特異ホモロジー群を利用することで、これが可能になるということを発見し、Chatelet 曲面・三次曲面・Tate 曲線の積など、興味深い実例を計算した。また、基礎体が二次元局所体の場合にも同じような構成が可能で

あるが、(3) で述べた Bloch-加藤予想の類似の反例を、この文脈(完備でない二次元局所体上の多様体に対する高次元類体論・Brauer-Manin 双対の類似)から幾何的に解釈することができた。一つのポイントは、(3)の構成に使ったトーラスを完備でない代数曲線の一般ヤコビ多様体と捉えることである。これらの研究は進展中であり、さらなる発展が見込まれる。まだ論文としてまとめてはいない。

(5) 代表的な代数的完全可積分系である Mumford 系のスペクトル曲線が最大限に退化した場合(より詳しくは、 $A_{2g}$  型の特異点を持つ場合)に、等位集合が「完備化された一般ヤコビ多様体」の開部分多様体(テータ因子の補集合)と同型となり、力学系の流れがヤコビ多様体の作用による流れとして線形化されることを証明した。さらに、その応用として KdV 方程式の有理関数解をすべて構成する新しいアルゴリズムを開発した。以上は Poitiers 大学の Pol Vanhaecke 氏および鈴鹿医療科学大学の井上玲氏との共同研究であり、論文①として発表した。

(6) Mumford 系には二つの拡張が知られている。一つは Beauville が導入した系であり、スペクトル曲線が超楕円曲線から一般の代数曲線へと一般化される。もう一つは Vanhaecke により導入された even Mumford 系であり、等位集合のヤコビ多様体における補集合が既約とは限らなくなり、幾何的により興味深い現象が現れる。(なお、この系は有限次元周期的戸田格子の理論と密接に関係する)。この両者を融合した新しい系(Beauville-Vanhaecke 系と呼ぶ)を構成し、それらの関係を明らかにした。以上は京都大学の小西由紀子氏および鈴鹿医療科学大学の井上玲氏との共同研究であり、論文⑤として発表した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

① Singular fiber of the Mumford system and rational solutions to the KdV hierarchy. (Pol Vanhaecke, Rei Inoue and Takao Yamazaki) Communications on Pure and Applied Mathematics, 63, 508-532 (2010) 査読有り

② A counterexample to generalizations of the Milnor-Bloch-Kato conjecture. (Michael Spiess and Takao Yamazaki) Journal of K-theory, 4, No. 1, 77-90 (2009)

査読有り

③ Milnor K-group attached to a torus and Birch-Tate conjecture. (Takao Yamazaki) International Journal of Mathematics, 20, No. 7, 841-857 (2009) 査読有り

④ Class field theory for a product of curves over a local field. (Takao Yamazaki) Mathematische Zeitschrift, 261, No. 1, 109-121 (2009) 査読有り

⑤ Jacobian variety and integrable system --- after Mumford, Beauville and Vanhaecke. (Rei Inoue, Yukiko Konishi and Takao Yamazaki) Journal of Geometry and Physics, 57, No. 3, 815-831 (2007) 査読有り

⑥ トーラス係数の Milnor K 群と Birch-Tate 予想. 山崎隆雄. 第 5 2 回代数学シンポジウム報告集、129-140 (2007) 査読無し

[学会発表] (計 10 件)

① Takao Yamazaki, Higher dimensional class field theory for a product of curves. January 20, 2010. Japan-Korea Number Theory 2010 at Seoul, Korea.

② Takao Yamazaki, Zero-cycles on a variety over a (two dimensional) local field. February 17, 2010. Workshop on period integral and motif, University of Tokyo.

③ Takao Yamazaki, Sato theory, p-adic tau function and arithmetic geometry. March 19, 2010. Kyushu Algebraic Number Theory 2010, Kyushu University.

④ Takao Yamazaki, Counter examples to variants of the Milnor-Bloch-Kato conjecture. March 12, 2009. Industrious Number Theory, Korea Institute for Advanced Study.

⑤ Takao Yamazaki, Milnor K-theory attached to semi-abelian varieties and class field theory. May 26, 2009. Workshop on arithmetic geometry in Tambara, Numata.

⑥ Takao Yamazaki, Generalized Jacobians and rational solutions for the Mumford system. June 6, 2008. Journées intégrables, Université de Poitiers, France.

⑦ Takao Yamazaki, Degenerate fibers of the Mumford system and rational solutions to

the KdV hierarchy. September 23, 2008. Number Theory and Physics at the Crossroads, Banff, Canada.

⑧ Takao Yamazaki, Counter examples to variants of the Milnor-Bloch-Kato conjecture. November 6, 2008. P-adic method and its applications in arithmetic geometry at Sendai, Tohoku University.

⑨ Takao Yamazaki, Milnor K-group attached to a torus and Birch-Tate conjecture. August 7, 2007. Symposium on Algebra. Kobe University.

⑩ Takao Yamazaki, Recent development on the even Mumford system. November 21, 2007. Seminaire groupes, algabres, et geometrie. Universite de Poitiers, France.

〔図書〕 (計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

○取得状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

山崎 隆雄 (YAMAZAKI TAKAO)  
東北大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：00312794

(2) 研究分担者 ( )

研究者番号：

(3) 連携研究者 ( )

研究者番号：