

機関番号：13501

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2007～2010

課題番号：19740007

研究課題名（和文） 表現のモジュライとその周辺

研究課題名（英文） Moduli of representations and related topics

研究代表者

中本 和典（NAKAMOTO KAZUNORI）

山梨大学・総合分析実験センター・教授

研究者番号：30342570

研究成果の概要（和文）：自由代数の複素数体上のボレル鋳型表現のモジュライについて、その有理ホモトピー型と混合ホッジ構造を記述した。また、ボレル鋳型表現の表現多様体の位相的構造について調べた。すなわち、基本的な表現のモジュライについて、その代数的位相幾何的構造を明らかにした。thick と呼ばれる既約表現のクラスの性質を調べ、階数2の自由群の4次 non-thick 既約表現のモジュライの記述を行った。行列の不変式環の構造を調べるため、退化ポアンカレ級数を6次の場合に求めた。

研究成果の概要（英文）：We described rational homotopy types and mixed Hodge structures of the moduli of representations with Borel mold over the complex number field for the free algebras. We also investigated topological structures of the representation varieties with Borel mold. In other words, we described topological structures of the moduli of representations explicitly for fundamental cases. We studied a certain class of irreducible representations that is called “thick”. We described the moduli of 4-dimensional non-thick irreducible representations for the free group of rank 2. Furthermore, we obtained the degenerated Poincare series of degree 6 for determining the structure of the matrix invariant ring.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	500,000	0	500,000
2008年度	500,000	150,000	650,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
年度			
総計	2,000,000	450,000	2,450,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数学、代数幾何学、不変式論、表現のモジュライ

1. 研究開始当初の背景

表現のモジュライが初めて登場したのは、19世紀に Fricke がコンパクトリーマン面の基本群の表現の同値類の空間を考へて、タイヒミュラー空間を実解析空間として実現したのが最初だとされている。その後、Weil によるリー群の離散部分群に関する剛

性定理や、絶対ガロア群の表現の変形空間など、表現のモジュライがさまざまな分野で重要な対象として現れてきた。

さまざまな場面で本質的な対象として現れる表現のモジュライであるが、群、モノイドや代数の表現のモジュライを構成しようとすると、通常やり方では、絶対既約表現

でない表現については組成因子が等しいものが同じ点としてくっついてしまい、表現の同値類がそのままモジュライの一つ一つの点に対応しない。これは、ある多様体を群で割る際、絶対既約でない表現に対応する点は安定点になっておらず、表現の同値類は不変式では区別できないからである。

表現の同値類一つを丁度一つの点としてみなそうとすると、別のモジュライの構成法が要求される。そこで本研究者は「鑄型」という概念を登場させた。鑄型とは行列環の部分代数のことであり、表現の行列環への像が生成する部分代数（鑄型）を指定して、その鑄型を与える表現を集めてくると、うまくモジュライを作ることができるという戦略である。ボレル鑄型表現については、すでにモジュライが構成できることは本研究者によりわかっており、鳥居猛氏（岡山大学）との共同研究で、ボレル鑄型表現のモジュライの位相的性質についてはある程度調べられていた（"Topology of the moduli of representations with Borel mold" Kazunori Nakamoto and Takeshi Torii, Pacific Journal of Mathematics 213 No.2 (2004) 365-387）。

2. 研究の目的

行列環の部分代数である「鑄型」を中心に、各鑄型に対する表現のモジュライの構成やその性質などを明らかにする。主に次の問題に取り組む。

(1) (低い次数の) 鑄型を分類せよ。もしくは、良い鑄型を選び出せ。3次の鑄型のモジュライについて、その構造を明らかにする。4次以降の鑄型について、「良い」鑄型を抽出し、その性質やモジュライの構造について調べる。

(2) 各鑄型に対して、その表現のモジュライを構成せよ。2次の表現のモジュライについて論文を完成させる。3次以降の表現のモジュライの構成を各鑄型に対して試みる。

(3) 各鑄型に対する表現のモジュライの性質を調べよ。各鑄型の表現のモジュライについて、その性質や記述を調べる。具体的な群やモノイド等の表現のモジュライについて、その構造や位相的性質について調べる。

3. 研究の方法

当初の研究の方法は次のとおりである。なお、実際には一部優先順位をかえて、研究を行った。

(1) 3次の鑄型について一部未解明な事項があるので、それに着手する。26タイプある鑄型について、論文" On classification of subalgebras of the full matrix ring of degree 3" としてまとめ上げる。

(2) 2次および3次の鑄型について、対応するモジュライを構成する。構成できたものから順次論文にまとめていく。

(3) 各鑄型に対する表現のモジュライについて、代数的位相幾何的性質については、鳥居猛氏（岡山大学）の協力を得ながら進めていく。また、不変式論的な性質については、奥山真吾氏（香川高専）の協力を得ながら進めていく。

4. 研究成果

(1) 自由代数の複素数体上のボレル鑄型表現のモジュライについて、鳥居猛氏（岡山大学）と共同でその位相的構造を調べた。

① 自由代数の複素数体上のボレル鑄型表現のモジュライや表現多様体について、有理ホモトピー型を記述した。また、サリバンの極小モデル上の混合ホッジ構造が、配位空間とファイバーのそれぞれの混合ホッジ構造のテンソル積であることを示した。

② 自由代数の生成元の個数が表現の次数に比べて小さいとき、ボレル鑄型表現の表現多様体の位相的構造について調べた。表現の次数が3, 4のときのボレル鑄型表現の表現多様体の整係数コホモロジー群を決定した。また、階数2の自由代数について、有理整数環上のボレル鑄型表現の表現多様体のピカル群を決定した。その応用として、2元生成群のボレル鑄型表現についての正規化に関する定理を得た。

これらの結果については共著論文

"Rational homotopy type of the moduli of representations with Borel mold"

"Topology of the representation varieties with Borel mold for unstable cases"

として出版予定である。

(2) 絶対既約表現の中にも、「thick」「dense」というクラスの表現があり、いろんな性質をもつことを発見した。面田康裕氏（明石高専）と共同で、thick, dense について調べた。

①thick, denseの基本的性質および具体的な群の既約表現について, thickness と denseness について調べた。群の n 次既約表現 ρ が thick とは, 表現しているベクトル空間の部分空間の組 (V, W) について, その次元の和が n に等しいならば, 群の元 g が取れて, $(\rho(g)V)+W$ が n 次元となることをいう。群の n 次既約表現が dense であるとは, 誘導される外積表現が t ねに既約であるときをいう。dense ならば thick であることが容易にわかる。thick または dense な絶対既約表現のクラスが, 絶対既約表現のモジュライの中で開集合をなすことを示した。

②階数 2 の自由群の 4 次 non-thick 既約表現のモジュライの記述を行った。この結果について, 第 4 1 回環論および表現論シンポジウムで講演した。

(3) 行列の不変式環のポアンカレ級数について, 奥山真吾氏(香川高専)と共に調べた。

① 行列 2 個の不変式環のポアンカレ級数を退化して作られる「退化ポアンカレ級数」について, 5 次, 6 次の場合の計算を行った。退化ポアンカレ級数とは, 2 個の行列の不変式環の 2 変数ポアンカレ級数から作られる級数で, 2 つある変数のうち, 1 つの変数を退化させる事で得られる。退化ポアンカレ級数は, ある性質をもつ行列の個数から Teranishi の結果を用いて計算できるので, コンピュータを使って退化ポアンカレ級数を求めた。これについては, 第 1 4 回多元環の表現論国際シンポジウムで講演を行った。

② 7 次の退化ポアンカレ級数についても, 候補が見つかった。候補が退化ポアンカレ級数であることを理論的に検証中である。また, 8 次以上の退化ポアンカレ級数についても, その形について予想が立てられた。

③ 5 次のポアンカレ級数についても, 部分的な結果が得られた。コンピュータを用い, 2 変数ポアンカレ級数をある一定の次数まで決定した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

① "Topology of the representation

varieties with Borel mold for unstable cases" Kazunori Nakamoto and Takeshi Torii, Journal of the Australian Mathematical Society, 発行予定. 査読有

② "Rational homotopy type of the moduli of representations with Borel mold" Kazunori Nakamoto and Takeshi Torii, Forum Mathematicum, 発行予定. 査読有

③ "The links of 3-dimensional singularities defined by Brieskorn polynomials" Atsuko Katanaga and Kazunori Nakamoto Mathematische Nachrichten 281, No.12, 1777-1790 (2008) 査読有

④ "Semi-universal deformation spaces of some simple elliptic singularities" Kazunori Nakamoto and Meral Tosun, C. R., Math., Acad. Sci. Paris 345, No. 1, 31-34 (2007) 査読有

⑤ "Algebraic vector bundles on $SL(3, \mathbb{C})$ " Kazunori Nakamoto and Takeshi Torii, Rocky Mountain Journal of Mathematics 37 (2007), no. 2, 587--596. 査読有

[学会発表] (計 3 件)

① Kazunori NAKAMOTO, "The degenerated Hilbert-Poincare series of the invariant rings of two matrices", 第 1 4 回多元環の表現論国際シンポジウム (ICRA XIV 東京) 平成 2 2 年 8 月 1 2 日, 国立オリンピック記念青少年総合センター

② 面田康裕・中本和典, "The moduli spaces of non-thick irreducible representations for the free group of rank 2", 第 4 1 回環論および表現論シンポジウム, 平成 2 0 年 9 月 6 日, 静岡大学

③ 面田康裕・中本和典, "Certain classes of irreducible representations", 日本数学会秋季総合分科会 函数解析学分科会, 平成 1 9 年 9 月 2 3 日, 東北大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中本 和典 (NAKAMOTO KAZUNORI)

山梨大学・総合分析実験センター・教授

研究者番号: 30342570

(2) 研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし