

機関番号：13901

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2007～2009

課題番号：19740009

研究課題名(和文)

ルート系に付随する多重ゼータ関数の研究とその応用

研究課題名(英文)

Multiple zeta functions associated with root systems and their applications

研究代表者：

小森 靖 (Yasushi Komori)

名古屋大学・多元数理科学研究科・助教

研究者番号：80343200

研究成果の概要(和文)：自然を記述する基本的な理論の一つである量子ゲージ理論において、分配関数は最も基本的で重要な量であると考えられる。Witten は特定の状況における量子ゲージ理論の研究において、その分配関数の極限がある種の空間の体積で記述されることを発見した。これはゼータ関数の特殊値とみなすことができる。当該研究ではこの特殊値を与える最も一般的な公式を導き出し、また関連する様々な物理的問題や数論的問題に一定の解答を与えた。

研究成果の概要(英文)：In the quantum gauge theory, which is one of those describing nature, the partition functions are considered to be the most fundamental and important quantities. Witten found that certain limits of the partition functions are described in terms of the volumes of certain spaces. These can be regarded as special values of zeta functions. In this study, we derived general formulas which give these special values, and furthermore presented some solutions to related problems.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	800,000	0	800,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
総計	2,400,000	480,000	2,880,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：多重ゼータ、ルート系、ワイル群、特殊値、母関数

## 1. 研究開始当初の背景

量子ゲージ理論において、分配関数は最も基本的で重要な量であると考えられる。Witten は二次元コンパクト多様体上のコンパクトリー群による量子ゲージ理論の研究に際し、その分配関数の極限が平坦接続のモジュライ空間の体積で記述されることを、path integral を含む物理的議論によって見出した。一方そのモジュライ空間の体積は、対応するリー群の有限次元既約表現の次元に関

するディリクレ級数となり、特に多様体が向き付け可能な場合、変数は種数に依存した偶数値を取ることで、及び構成法から有理数になることも主張されている。後に Zagier は単純リー代数に対して同様に定義したディリクレ級数を Witten ゼータ関数と名づけ、純粋な解析数論的考察からも有理数性が従うことを証明抜きで述べている。特に  $A_2$ ,  $A_3$  型の場合は、具体的な公式が Zagier の他様々な研究者によって導かれているが、一般の単純リー代数に関しては研究開始当初は解明

されていなかった。このような状況において、名古屋大の松本氏と首都大の津村氏は、 $B_2$  型及び  $A_2$ ,  $A_3$  型の場合に Witten ゼータ関数の多変数化を考察し、特殊値の他解析接続によって有理型関数としての性質、関数関係式等に関する様々な結果を得た。また名古屋大の中村氏も独立に  $A_2$  型の関数関係式を得ていた。

## 2. 研究の目的

ルート系に付随する多重ゼータ関数は Witten ゼータ関数はもちろん Euler-Zagier 多重ゼータ関数や Riemann ゼータ関数などを含む一般化として、非常に重要なゼータ関数のクラスであると考えられる。当該研究はルート系に付随する多重ゼータ関数の解析によってこれらのゼータ関数の総合的な理解を目指すものである。具体的には以下を目標とする。

- (1) ルート系に付随する多重ゼータ値及びそれらの関係式、関数関係式の完全な理解。それまでの研究によって、すでに多くの既知の結果を含む理論を得ているが、まだそれに含まれない散発的な結果が存在する。そのような結果も含む統一的な理論の解明を行う。
- (2) ルート系に付随する多重ゼータ関数の有理型関数としての理解。非絶対収束領域における有理型関数としての性質についてはあまり理解が進んでいなかった。これは扱いやすい表示が不足していたことを意味する。申請者は  $A_2$  型において Riemann ゼータ関数における contour 積分表示の類似である Shintani 型の積分表示を得ており、これをもとにさらに一般の多重ゼータ関数における Shintani 型の積分表示の解明を行い、従来の方法と併せて有理型関数としての全体像を明らかにする。
- (3) ルート系に付随する多重ゼータ関数理論の応用。まずルート系に付随した Bernoulli 多項式を用いて多重  $L$  値及び値の関係式等について研究することは数論的応用として重要だと考えられる。また Riemann ゼータ関数論で重要な役割を果たしている関数等式について、一般の多重ゼータ関数における Shintani 型の積分表示から解明し、critical strip のルート系的理解を通して Riemann ゼータ関数論へ応用したい。さらに Euler-Zagier 多重ゼータ値の関係式はまだ次元の上限を決定するほど得られていないため、この問題への

応用も考えたい。この他にも様々な応用が考えられるが、特に Witten ゼータ関数のもととなった量子ゲージ理論への応用も重要な研究課題とする。

## 3. 研究の方法

- (1) Riemann ゼータ関数論の場合、絶対収束領域と非絶対収束領域は関数等式によって結ばれており相補的なものである。このことから多重ゼータ関数論においてもなんらかの関係を期待することは妥当であり、Riemann ゼータ関数論における関係以上に重要な情報が得られる可能性が考えられる。したがってこれらを同時進行していくことにより、研究を滞りなく進めていくことができると考えられる。
- (2) 本研究課題は広範にわたる分野の知識を集結させることによって解決されると期待できる。特に平成 19 年度の研究ではゼータ関数論の専門家である松本耕二氏(名古屋大)、津村博文氏(首都大)や表現論の専門家である庄司俊明氏、落合啓之氏(名古屋大)また幾何学の専門家である納谷信氏(名古屋大)等、各分野の専門家との研究交流によって効率を上げる。また必要な知識を得るために国内外の研究会に幅広く参加する予定であり、研究課題“代数群、ヘッケ環および複素鏡映群の表現論”での議論も役立つことが期待される。
- (3) ルート系に付随する多重ゼータ値の母関数に関して、一般には高次元の多面体を単体分割して計算するため膨大な項からなる式の計算が必要である。この問題は理論的に解決される予定ではあるが、計算機で行う実験を通し効率よく研究するため、及び新たな理論構築のため高度な数式処理を高速に行える計算機は非常に重要な役割を担っている。

## 4. 研究成果

- (1) ルート系に付随する多重ゼータ関数の正の領域における値を記述するベルヌーイ数およびベルヌーイ多項式の母関数の研究：これまでの研究では母関数には複雑な積分が残されており、実際の計算や応用には不向きであったが、単純凸多面体の台のフーリエ変換を研究することによってこの積分を実行することに成功し、その結果ルート系の情報を十分に反映した母関数の簡単な表示を得ることができた。これによってウィツテ

ンによる平坦接続のモジュライ空間の体積が具体的に計算可能となった。また、これまでほとんどなされていないディリクレ指標を含む多重ゼータ値の計算も可能となり、いくつかの具体例を与えることができた。さらにこの母関数の簡単な具体系から古典的なベルヌーイ多項式に関するいくつかの公式に対して、新たな知見が与えられつつあり、今後の発展が大いに期待される。

- (2) 一般の多重フルヴィッツ・レルヒゼータ関数に対する面積分表示の研究：これまでの研究によって二重モデルトーンハイムゼータ関数に対して面積分表示を与えることができていたが、一般の多重フルヴィッツ・レルヒゼータ関数に対しても同様の表示を与えることに成功した。これによりこれらの関数の非正領域における挙動を詳しく調べることが可能となり、特に非正領域におけるベルヌーイ数およびベルヌーイ多項式の定義を与えることができたことは非常に重要であると考えられる。
- (3) Eisenstein 型級数と  $q$  ゼータ関数の特殊値の計算とその母関数の研究：フルヴィッツやクロネッカーらによって研究されてきた Eisenstein 級数の特殊値や、保型形式と密接な関連のあるラマニュジャンによる公式等に対し統一的な見方を与え、それら特殊値の母関数を構成した。さらにリーマンゼータ関数の  $q$  類似である  $q$  ゼータ関数の正整数での特殊値も全く同様の方法で計算できることを示し、さらに Bernoulli 多項式の  $q$  類似を定義することができた。 $q$  類似はリー代数の表現の指標公式と自然に解釈できるため、これは  $SU(2)$  の場合を求めたことに相当する。したがってこの結果を一般のルート系に対応するゼータ関数の  $q$  類似に適用することが望まれる。
- (4) 多重ゼータ値におけるシャッフル積の研究：これまで多重ゼータ値のシャッフル積はドリinfeld積分によって与えられてきたが、それは部分分数展開だけで与えられることを示した。これによればシャッフル積の展開とルート系の多重ゼータ値とが対応することが分かり、多重ゼータ値とシャッフル積との対応がより明確になった。またこの方法を用いることによって、extended double shuffle relation を積分を使わない形で再定式化することができた。これらによって多重ゼータ値の理解がよ

り進むことが期待される。

- (5) ルート系に付随する多重ゼータ関数の正の領域における値を記述するベルヌーイ数およびベルヌーイ多項式の母関数の研究：母関数の簡単な表示を得ることができ、ウィッテンによる一般の半単純コンパクト単連結リー群を主束とする平坦接続のモジュライ空間の体積が具体的に計算可能となった。さらに、この結果を元に例外型である  $G_2$  型に対しての具体的な母関数の構成や特殊値の計算、及び関数関係式の導出を行った。またウィッテンがもともと問題としていた単連結とは限らない一般の半単純コンパクトリー群に対するモジュライ空間の体積を求める方法として数論におけるディリクレ算術定理の考え方を用いることによって考察した。
- (6) Euler 型二重級数の関数等式の研究：Euler 型の多重ゼータ関数の関数等式の探求がなされているが、この問題について名古屋大学の松本氏の研究を推し進めることによって、二重ゼータ関数に関してこれまでに得られていなかった対称的な関数等式を得ることができた。今後この方法による一般化が期待される。
- (7) Weng ゼータの関数等式の研究：Weng によるルート系に付随するゼータ関数について、これまで  $A_2, A_3, A_4, B_2, G_2$  型についてのみ示されていた関数等式を、統一的な方法により一般ルート系において証明することができた。上記のルート系については関数等式からリーマン予想が示されているため、一般ルート系における関数等式によってこのクラス全体に対するリーマン予想の証明へ大きく近づくことができたと思う。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件) ※5 件全て査読あり

- ① Y. Komori, M. Noumi and J. Shiraishi, Kernel functions for difference operators of Ruijsenaars type and their applications, SIGMA, **5** (2009), 054, arXiv:0812.0279.
- ② Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, An introduction to the theory of

zeta-functions of root systems, MSJ  
Memoirs Vol. 21, pp. 115-140.

- ③ Y. Komori, An integral representation of the Mordell-Tornheim double zeta function and its values at non-positive integers, Ramanujan J., **17** (2008) no. 2, 163-183.
- ④ Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Zeta and  $L$ -functions and Bernoulli polynomials of root systems, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **84** (2008) no. 5, 57-62.
- ⑤ Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Zeta-functions of root systems, in The conference on  $L$ -Functions, edited by L. Weng, M. Kaneko, World Scientific, 2007.

[学会発表] (計 17 件)

- ① 小森 靖,  $(G, P)$  に付随する Weng ゼータ関数の関数等式について, (代数的整数論とその周辺, 2009 年 12 月 9 日, 東京大学).
- ② Y. Komori, Multiple Bernoulli polynomials and multiple  $L$ -functions of root systems, (l'atelier Zeta III, 2009 年 11 月 23 日, Univ. Jean-Monnet, France).
- ③ 小森 靖, ルート系の多重ベルヌーイ多項式と多重  $L$  関数について, (数学談話会, 2009 年 9 月 10 日, 愛媛大学).
- ④ 小森 靖, ルート系の多重ベルヌーイ多項式と多重  $L$  関数について, (表現論と組合せ論, 2009 年 8 月 27 日, 北海道大学).
- ⑤ 小森 靖, Functional equations for Weng's zeta functions for  $(G, P)$ , (代数学セミナー, 2009 年 6 月 19 日, 九州大学).
- ⑥ 小森 靖, Functional equations for Weng's zeta functions for  $(G, P)$ , (解析数論セミナー, 2009 年 6 月 17 日, 名古屋大学).
- ⑦ 小森 靖, 松本耕二, 津村博文, Shuffle products for multiple zeta values and partial fraction decompositions of zeta-functions of root systems, (日

本数学会年会, 2009 年 3 月 27 日, 東京大学).

- ⑧ 小森 靖, Hurwitz-Lerch 多重ゼータ関数の面積分表示と多重ベルヌーイ数, (日本数学会年会, 2009 年 3 月 27 日, 東京大学).
- ⑨ Y. Komori, Multiple Bernoulli polynomials and multiple  $L$ -functions of root systems, (Oberseminar ZAHLENTHEORIE, 2008 年 11 月 27 日, Würzburg Univ., Germany).
- ⑩ Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Certain double series of Euler type and of Eisenstein type and Hurwitz numbers (II), (New Aspects of Analytic Number Theory, 2008 年 10 月 29 日, 京都大学).
- ⑪ Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Certain double series of Euler type and of Eisenstein type and Hurwitz numbers (I), (New Aspects of Analytic Number Theory, 2008 年 10 月 28 日, 京都大学).
- ⑫ Y. Komori, Multiple Bernoulli polynomials and multiple zeta functions of root systems, ("Elliptic integrable systems, isomonodromy problems, and hypergeometric functions", 2008 年 7 月 21 日~25 日, Max Planck Institute for Mathematics, Germany).
- ⑬ 小森 靖, 多重ゼータ関数の積分表示と多重ベルヌーイ数, (整数論セミナー, 2008 年 6 月 12 日, 津田塾大学).
- ⑭ Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Multiple Bernoulli polynomials and multiple  $L$ -functions of root systems, (French-Japanese Winter School on Zeta and  $L$ -functions, 2008 年 1 月 9 日, マホロバマインズ 三浦海岸).
- ⑮ 小森 靖, 重ゼータ関数の積分表示について, (解析数論セミナー, 2007 年 12 月 19 日, 名古屋大学).
- ⑯ Y. Komori, An integral representation of multiple zeta-functions, (Journées autour des series de Dirichlet, 2007 年 11 月 13 日, Univ. Lille 1, France).

⑰ Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura,  
n multiple Bernoulli polynomials and  
multiple  $L$ -functions of root systems,  
Analytic Number Theory and Related  
Areas, 2007年10月19日, 京都大学).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小森 靖 (Yasushi Komori)

名古屋大学・多元数理科学研究科・助教

研究者番号：80343200