様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　５月２６日現在

研究種目：若手研究（B）
研究期間：2007～2009
課題番号：１９７４００１３
研究課題名（和文）　旗多様体の組み合わせ的構造と量子変形

研究課題名（英文）　Combinatorial structures of flag varieties and quantum deformation

研究代表者
前野　俊昭（MAENO TOSHIAKI）
京都大学・大学院工学研究科・講師
研究者番号：60291423

研究成果の概要（和文）：当研究課題においては、Weyl 群上の非可換微分構造を記述する Nichols-Woronowicz 代数の表現と楕円 Dunkl 作用素の関係を明らかにした他、複素鏡映群の余不変式代数の Nichols-Woronowicz 模型の構成、Fomin-Kirillov の二次代数の拡大を用いた旗多様体のトーラス同変(量子)コホモロジー環に対する新しい Pieri 型公式の導出を行った。Lefschetz 性に関する結果としては、有限次元 Gorenstein 代数の Lefschetz 元の特徴付けを対応する多項式の Hessian を用いて与え、Lefschetz 性を持たないような Gorenstein 代数の新しい例を構成した。

研究成果の概要（英文）：In the present research, we revealed a relationship between a representation of the Nichols-Woronowicz algebra describing the braided differential structure on the Weyl groups and the elliptic Dunkl operators. We also constructed the Nichols-Woronowicz model of the coinvariant algebras of the complex reflection groups. Moreover, a new Pieri-type formula for the torus-equivariant (quantum) cohomology ring of the flag variety has been proved by means of an extension of the Fomin-Kirillov quadratic algebra. In the direction of research on Lefschetz properties, we gave a characterization of the Lefschetz elements in finite-dimensional Gorenstein algebras in terms of the Hessians of the corresponding polynomials. As an application, we constructed a new series of Gorenstein algebras without the strong Lefschetz property.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	1,100,000	0	1,100,000
２００８年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２００９年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,200,000	630,000	3,830,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：旗多様体、鏡映群、Hopf 代数、Lefschetz 性

１．研究開始当初の背景

これまで、主に旗多様体の（量子）コホモロ

ジー環や、より一般に鏡映群の余不変式代数の組み合わせ的構造に関する研究を行ってきた。特に重要な意義を持つ研究対象として（量子）Schubert 多項式をはじめとする余不変式環の線型基底の構成と、構造定数を記述する Pieri 型の公式や Chevalley 型の公式がある。このようなテーマへのアプローチの一つとして、1990 年代前半に Fomin と Kirillov による二次代数が提案され、量子 Schubert 多項式の構成、Pieri 型公式の導出への応用があることが分っていた。

彼らの二次代数は Nichols-Woronowicz 代数と呼ばれる Hopf 代数の立場から概念的に理解することができ、従って、非可換微分構造が Schubert calculus の研究に有用であることが Bazlov により指摘され、Fomin-Kirillov の構成は一般の有限 Coxeter 群へと拡張された。また、Bazlov と Berenstein は Nichols-Woronowicz 代数のダブルとして有理 Cherednik 代数を構成することを試みていた。

2006 年までの研究代表者の主な研究テーマとして、Fomin-Kirillov の二次代数の一般のルート系への拡張、彼らの構成の K 理論的な類似物、及び、量子 Grothendieck 多項式の構成を行っており、上述の Bazlov-Berenstein の仕事の他、Lenart-Postnikov の K 理論的 Chevalley 公式、Buchstaber-Felder-Veselov の楕円 Dunkl 作用素に関する仕事、Macdonald 多項式の構成等から、Weyl 群上の非可換微分構造と様々な可積分系との関係について興味を持ち始めていた。

また、Schubert calculus のコンテクストで現れる多くの組み合わせ的構造は旗多様体のコホモロジー環に限らず、有限 Coxeter 群や、更には、複素鏡映群の余不変式代数にまで拡張できる。このような代数は、言わば仮想的な旗多様体のコホモロジー環と見なす事が出来るはずである。こうした観点から、Kaehler 多様体のコホモロジーに対する強 Lefschetz 定理の抽象化である有限次元代数の Lefschetz 性に基いた余不変式代数の研究に着手していた。

２．研究の目的

旗多様体や等質空間、あるいは、鏡映群に対し共通して現れる組み合わせ的な構造を、ある種の Hopf 代数が記述する非可換微分構造や可積分系との関係の立場から明らかにすることが研究の目的である。
より具体的には、旗多様体の（量子）コホモロジー環や鏡映群の余不変式代数の Schubert calculus を中心的なテーマとし、それを Weyl 群・鏡映群上の非可換微分構造を用いて記述すること（非可換 Schubert calculus）により、Calogero 系や Ruijsenaars 系等の量子可積分系との繋がりを明らかにする。別の見方をすれば、可積分系の理論に対する”Schubert calculus”の構築を目指す。

また、一般の複素鏡映群の余不変式代数を仮想的な旗多様体のコホモロジー環と見なす事により、この仮想的な旗多様体の構造を解明する。このような方向では、特に有限次元可換代数の Lefschetz 性に関しても研究を行うこととし、複素鏡映群の余不変式代数を含むようなクラスである Gorenstein 代数を中心に扱う。

３．研究の方法

研究目的にもある通り、旗多様体の組み合わせ的構造を Nichols-Woronowicz 代数が記述する Weyl 群上の非可換微分構造の観点から解明することが中心的なテーマであるが、ここで用いられる Nichols-Woronowicz 代数は元々Woronowicz による量子群上の微分形式の理論を起源の一つとしており、Nichols-Woronowicz 代数においては“braided differential calculus”の手法を強力に用いることが出来るという点が利点として挙げられる。このような視点は、従来の Schubert calculus や可積分系の研究であまり見られなかったものであり、本研究の特色の一つであると言える。また、有限群上の非可換微分構造を一種の「非可換離散幾何的構造」として扱うという見方が Majid によって提唱されており、その立場からすると我々の構成は Weyl 群上の「U(1)-ゲージ理論」と旗多様体上の Schubert calculus との関係を見ているようにも考えられる。つまり、Weyl 群上の「非可換離散幾何」と旗多様体上の通常の幾何との対応関係を見ていると考えることができる。

もう一つの重要な対象は量子可積分系、特に、Sutherland 型の模型において現れる Dunkl 作用素と、Schubert calculus における Monk 公式との類似性である。この事実は既に Fomin-Kirillov による二次代数を用いた旗多様体の（量子）コホモロジー環のモデルの構成でも重要な役割を果たしていた。その後の研究代表者による旗多様体の K 環のモデルの構成においても、Dunkl 作用素の乗法的類似である Macdonald- Ruijsenaars-Schneider 型作用素が Chevalley 型公式との関係で現れる等、一連の構成において一貫して現れる現象だと思われる。この対応は、Fomin-Kirillov の二次代数の場合には、二次代数の表現である Calogero-Moser 表現や Bruhat 表現と呼ばれる表現を通じて見て取

ることができる。この点は、特に Calogero 系との対応から「楕円化」した構成を行おうとする際には特に重要な点であると思われる。

また、一般の鏡映群に対する仮想的旗多様体の幾何の一つの現れとして余不変式代数の Schubert calculus を研究することに関しては、Hillar や Shoji らによる先行研究結果があるが、非可換微分構造の立場からの研究は我々独自のものである。また、複素鏡映群の余不変式代数は有限次元 Gorenstein 代数の例として重要なクラスをなしており、Lefschetz 性に注目して研究を行うことで可換環論の立場からも興味深い結果が得られることを期待している。

４．研究成果

当研究課題においては、以下のような成果を得ることができた。

(1) Weyl 群上の Yetter-Drinfeld 加群から定まる Nichols-Woronowicz 代数に対し、差分商作用素型の作用素から定まる表現を考察し、可能な作用素の形の分類を行った。結果として、Buchstaber-Felder-Veselov の楕円 Dunkl 作用素の分類に現れる Weyl 群不変型の作用素にちょうど対応するものが現れることが分った。また、Fomin-Kirillov の二次代数のある種の拡大を考えると、Weyl 群不変の場合とは限らない楕円 Dunkl 作用素の分類と一致するクラスの作用素が得られる。さらに、この代数の中で Postnikov の Pieri 型公式の類似が成立することも証明した。この公式のスケール極限を取ることにより、量子 Pieri 公式が得られることも分かる。これらの結果は、可積分系の理論と（量子）Schubert calculus との関係を示すものとして興味深い。研究目的に挙げた「可積分系に対する Schubert calculus」は未だ言葉以上の実体を獲得したとは言えないが、ここで得た公式は確かにそのような構造が存在していることの証拠と考えられるだろう。

(2) 複素鏡映群の余不変式代数に関する Nichols-Woronovicz 模型の構成を行った。この結果は、Bazlov による有限 Coxeter 群の余不変式代数に対する構成の拡張である。複素鏡映群を扱う際には、Yetter-Drinfeld 加群の定義において 1-コサイクルの情報を処理しなくてはならない点が有限 Coxeter 群の場合とは異なっている。また、Dunkl-Opdam による複素鏡映群に対する Dunkl 作用素に相当する構造が用いられる。関連する話題として、Shoji-Rampetas による複素鏡映群の余不変式代数の線型基底の構成や、Crampe-Young による複素鏡映群に対する Sutherland 模型の研究がある。

(3) 旗多様体のトーラス同変（量子）コホモロジー環に対する二次代数、あるいは、Nichols-Woronowicz 代数を用いたモデルの構成。Fomin-Kirillov の二次代数を、多項式環（一点の同変コホモロジー環）で拡大することにより、A 型旗多様体の同変コホモロジー環を Dunkl 元と呼ばれる元が生成する部分代数として実現することができる。また、Dunkl 元たちの基本対称式をこの代数の中で展開する組み合わせ的な公式を得たが、これにより二重 Schubert 多項式に関する新しい Pieri 型公式を得ることができた。この構成は自然な量子変形が可能であり、それに応じて量子 Pieri 公式も得られる。
A 型以外の場合についても、対応する Nichols-Woronovicz 代数の拡大を用いてやはり同変コホモロジー環のモデルが構成できる。ここで用いられた構成は、Bazlov-Berenstein による有理 Cherednik 代数の構成とも関係があるようであり、そのような観点からも更に研究を継続している。

(4) 有限次元 Gorenstein 代数の Lefschetz 元に対する Hessian 判定法。有限次元可換 Gorenstein 代数は、ある多項式に作用する微分多項式全体として実現することができる。このような描像に基いて、有限次元次数付 Gorenstein 代数の中の次数 1 の元が Lefschetz 元であるための必要十分条件をその多項式の Hessian やその高階の類似物を用いて与えることができた。例えば有限 Coxeter 群の余不変式代数は Lefschetz 性を持つ Gorenstein 代数の例であり、上述のような描像は所謂ハーモニクス表示を考えることに他ならない。更に Stanley の仕事で示されたように、Bruhat 順序に関する Sperner 性といった組み合わせ的な問題とも繋がっている点が興味深い。
我々の仕事では、応用として Hessian や高階の Hessian が恒等的に消えるような多項式から、強 Lefschetz 性を持たないような Gorenstein 代数の新しい例を構成することができた。Hessian が恒等的に消えるような多項式は 19 世紀に Gordan-Noether によりなされた古典的な研究のテーマともなっており、代数幾何、不変式論、微分方程式論との関係で重要なトピックと思われるが、その後長く忘れられていたようである。これに関しては現在も渡辺氏と共同研究を継続中である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

① Anatol N. Kirillov and Toshiaki Maeno, "Extended quadratic algebra and a model of the equivariant cohomology ring of flag varieties", Algebra i Analiz, 査読有, Vol. 22, 2010, pp.155－176

② Anatol N. Kirillov and Toshiaki Maeno, "Nichols-Woronowicz model of coinvariant algebra of complex reflection groups", Journal of Pure and Applied Algebra, 査読有, Vol. 214, 2010, pp.402 – 409

③ Toshiaki Maeno and Junzo Watanabe, "Lefschetz elements of Artinian Gorenstein algebras and Hessians of homogeneous polynomials", Illinois Journal of Mathematics, 査読有, Vol. 53, 2009, pp.591 – 603

④ Anatol N. Kirillov and Toshiaki Maeno, "Braided differential structure on Weyl groups, quadratic algebras and elliptic functions", International Mathematics Research Notices, 査読有, Vol. 2008, 2008, 23pp.

６．研究組織

(1)研究代表者

前野　俊昭（MAENO　TOSHIAKI）

京都大学・大学院工学研究科・講師

研究者番号：60291423

(2)研究分担者　なし

(3)連携研究者　なし

研究者番号：