様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年５月１６日現在

機関番号：１５４０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：２００７～２０１０
課題番号：１９７４００１６
研究課題名（和文）　形式的ループ空間・アーク空間の応用

研究課題名（英文）　Applications of formal loop spaces and arc spaces

研究代表者
高橋　宣能（TAKAHASHI NOBUYOSHI）
広島大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号：６０３０１２９８

研究成果の概要（和文）：
形式的ループ空間やアーク空間など、代数幾何学における弦理論に関連した手法や問題について研究を行った。まず、多様体の対称積の系列から得られるモチーフ的ゼータ函数の有理性などについての結果を得た。この際､超準的点の数え上げという不変量を導入した。この不変量の弦理論的な変種について、その全体のなす秩序について調べた。また、相対グロモフ・ウィッテン不変量への可約曲線の寄与に関する研究なども行った。

研究成果の概要（英文）：
I studied techniques and problems in algebraic geometry which are related to string theory, such as formal loop spaces and arc spaces. First, I obtained certain results on rationality of motivic zeta functions, which are certain functions obtained from the symmetric powers of varieties. An invariant, called nonstandard point counting, was introduced here. The structure of the totality of a string-theoretic variant of this invariant was studied. Also, I studied the contribution of a reducible curve to the relative Gromov-Witten invariant.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	900,000	0	900,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総　計	3,100,000	660,000	3,760,000

研究分野：代数学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：モティーフ的ゼータ函数・弦理論的不変量・相対 Gromov-Witten 不変量

１．研究開始当初の背景

1990 年代の初め頃から、弦理論の手法や問題に影響を受けて、代数幾何学において多くの発展が見られた。その代表的なものとしてミラー対称性があり、物理学的にも数学的にも様々なことが解明された。だが、もともとの物理学的な議論と数学的な手法の間にはいまだ大きなギャップがあり、これを埋めることは数学の大きな発展に結びつくと思われる。そのための道具として、アーク空間や形式的ループ空間などがある。これまでに、

前者はモティヴィック積分を通して特異点論などに応用されており、また後者は chiral de Rham 複体の幾何学的構成などに応用されていた。

２．研究の目的

以下の課題の解決を目標とした。

(1) 形式的ループ空間などを用いた、弦理論的手法の正当化。

弦理論の発想を数学的に厳密化するために、形式的ループ空間あるいはその変種などを用いて、Gromov-Witten 不変量や相対 Gromov-Witten 不変量を計算し、それらの性質(たとえばミラー対称性など)を導出する。

(2) 形式的ループ空間およびアーク空間の更なる応用。

正標数における Frobenius 写像を用いた特異点の理論と標数０におけるアーク空間や乗数イデアルを用いた特異点の研究には、様々な類似点が観察されていた。これをヒントに、Frobenius 写像とアーク空間や形式的ループ空間のより直接的な類似を模索する。また、アーク空間や形式的ループ空間から得られる特異点や多様体の不変量について詳しく調べる。

３．研究の方法

研究目的(1)については、弦理論の一部分の代数学的類似といえる頂点作用素代数の幾何学的な実現などについて最近の研究を調査し、考察した。また、研究代表者がは射影平面と非特異三次曲線の組の相対 Gromov-Witten 不変量についての研究を以前から行っているので、引き続き具体的な計算や理論的な考察を行った。

研究目的(2)については、形式的ループ空間やアーク空間の類似をいくつか構成し、その性質を調べた。また、モティーフ的積分から得られる不変量やそれに関連した不変量、モティーフ的ゼータ函数などについても研究した。

４．研究成果

当初の目的については明確な結果が得られなかったが、そこから派生する問題について様々な知見が得られた。

(1) 相対 Gromov-Witten 不変量に関する結果。

射影平面と非特異三次曲線の組の相対 Gromov-Witten 不変量に関連して、四次以下の曲線であって有理的かつ非特異三次曲線と最大に接するものの数を計算した。
これを相対 Gromov-Witten 不変量と関連づけることにより、(直線)+(三次曲線)の形の曲線が相対 Gromov-Witten 不変量に重複度 3 で寄与することが予想された。そこで一般に、２つの成分を持つ曲線の相対 Gromov-Witten 不変量への寄与を計算した。この計算はモデュライ空間の具体的な記述によるものである。
対数的曲面の相対 Gromov-Witten 理論においては、可約な曲線が多くの場合に現れる。そこでこのような計算は、具体的な曲線の数え上げと相対 Gromov-Witten 不変量を結びつける上で、多重被覆の寄与とともに必要となるものである。より多くの成分を持つ場合が次の課題であり、今回の計算はその場合にも役立つものと考えられる。
論文は、“On the multiplicity of reducible relative stable morphisms”の標題で投稿中である。

(2) 形式的ループ空間・アーク空間について。

形式的ループ空間・アーク空間の、ある種の無限小版の系列を発見し、いくつか計算を行ったが、具体的な応用には至らなかった。今後、より詳細に調べたい。

(3) 代数的力学系の Grothendieck 環およびモティーフ的ゼータ函数。

以前から、代数的力学系のモティーフ的ゼータ函数の有理性を Grothendieck 環、あるいはそれに直線の逆元を付け加えた環において考察していたが、より強い結果を得るために、超準的点の数え上げという不変量を定義した。また、この不変量の応用として、代数的力学系の Grothendieck 環(に直線の逆元を付け加えたもの)の中で２つの元をどう見分けるか、という問題を取り扱った。たとえば、(直線, 二倍写像)と(直線, 三倍写像)の差は巾零でないことが分かる。
論文は“Nonstandard point counting for algebraic varieties”の標題で Communications in Algebra に掲載予定である。

(4) 弦理論的モティーフ的測度について。

上記の「超準的点の数え上げ」などはモテ

ィーフ的測度と呼ばれるものである。モティーフ的測度が与えられたとき、特異点の情報をより強く反映させた弦理論的モティーフ的測度というものが考えられる。これは最小食い違い係数の精密化と考えられ、最小食い違い係数が小さいとき大きくなるような量である。一方で、最小食い違い係数については昇鎖律が様々な設定の下で予想されている。

そこで、弦理論的モティーフ的測度については降鎖律が成り立つのではないかと推測し、任意次元トーリックで標準的係数を持つ場合、および二次元トーリックで係数をある降鎖率を満たす集合から取った場合について証明した(論文 1)。

同様の性質はより広いクラスの代数多様体で考えることができ、もしそれが成立するとすれば、たとえば極小モデルプログラムにおいてフリップが有限回で停止する根拠と見ることができるなど、代数多様体の全体の秩序を表現するものと言える。

(5) 対称モノイダル圏におけるモティーフ的ゼータ函数(筑波大の木村健一郎氏・広島大の木村俊一氏との共同研究)。

Chow モティーフについて木村有限性という性質の成立が予想されており、このことからモティーフ的ゼータ函数は Chow モティーフの Grothendieck 環に係数を持つものと考えたとき有理的になることが期待されている。一方、混合モティーフに対しては木村有限性は必ずしも成り立たず、少し弱い条件である Schur 有限性が成り立つことが予想されている。そこで、一般に対称モノイダル圏において Schur 有限性という条件のみから有理性が成り立つか、という問題について調べた。まず、determinantally rational という性質はいつでも成り立つことが分かった。一方で、対称モノイダル圏と Schur 有限な対象の組の例を具体的に構成することにより、uniformly rational という性質は必ずしも成り立たないことを証明した。(“Motivic zeta functions in additive monoidal categories”, 投稿中)

対称モノイダル圏については、双対の存在を仮定するのも自然な設定である。この場合には、uniform rationality の成立は微妙な問題であると考えられるので、今後考察してみたい。

(6) 代数曲面上の曲線の集合が生成する部分格子の計算(広島大の島田伊知朗氏との共同研究)。

非特異射影複素曲面上に曲線の集合が与えられたとき、それらの生成する格子の、primitive closure における指数を問題とした。特に、平面の一般の４直線で分岐する被覆(Fermat 曲面から平面への被覆の中間被覆と見ることもできる)の特異点解消上でいくつかの直線の逆像で生成される格子の場合について、計算機による実験を行った。手法としては、島田氏による位相幾何学的な計算と、巡回商特異点の解消などの情報を用いた代数幾何学的な計算を組み合わせたものである。(論文 2)

これは、塩田徹治氏らによる Fermat 曲面の Neron-Severi 格子の研究に関連するものである。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 2 件)

1. 高橋宣能, Descending chain condition for stringy invariants, 京都大学数理解析研究所講究録別冊, 査読有, B24, 2011, 掲載決定

2. 島田伊知朗・高橋宣能, Primitivity of sublattices generated by classes of curves on an algebraic surface, Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli, 査読有, 59 巻, 2010, pp. 77-95

〔学会発表〕(計 8 件)

1. 高橋宣能, Descending chain condition for stringy invariants, 高次元代数幾何の周辺, 2009.12.16, 京都大学 理学部

2. 高橋宣能, 相対 Gromov-Witten 不変量, 代数幾何学サマースクール2009, 2009.7.28, 東京大学玉原国際セミナーハウス

3. 高橋宣能, 三次曲線の補集合上の細かい数え上げ, 射影多様体の幾何とその周辺 2008, 2008.11.2, 高知大学理学部

4. 高橋宣能, Motivic zeta functions in additive monoidal categories, 代数幾何学サマースクール2008, 2008.8.12, 東京大学玉原国際セミナーハウス

5. 高橋宣能, Schur-finiteness and rationality of motivic zeta, 第３回代数・解析・幾何学セミナー, 2008.2.20, 鹿児島大学理学部

6. 高橋宣能, 有向グラフの対称積の母函数, 日本数学会中国・四国支部例会, 2008.1.27, 山口大学大学会館会議室

7. 高橋宣能, Rationality and irrationality of certain motivic zeta functions, Algebraic Geometry and Commutative Algebra Tokyo 2007, 2007.12.14, 東京大学大学院数理科学研究科

8. 高橋宣能,形式的超ループ空間と頂点作用素代数, 代数幾何セミナー2007, 2007.8.9, 東京大学玉原国際セミナーハウス

６．研究組織

(1)研究代表者

高橋　宣能 (TAKAHASHI NOBUYOSHI)

広島大学・大学院理学研究科・助教

研究者番号：60301298

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし