

研究種目： 若手研究(B)

研究期間： 2007 ~ 2010

課題番号： 19740017

研究課題名(和文) 保型形式に付随するモチーフの具体的構成に関する研究

研究課題名(英文)

A study of explicit construction of motives associated to automorphic forms

研究代表者 山内 卓也 (YAMAUCHI TAKUYA)

大阪府立大学・総合教育研究機構・教育拠点形成教員

研究者番号：90432707

研究分野：整数論

科研費の分科・細目：代数学

キーワード：保型形式、ガロア表現、L関数

## 1. 研究計画の概要

私は現在までに  $\mathbb{Q}$ -曲線、及び、そのモチーフへの一般化である  $\mathbb{Q}$ -モチーフの性質を解明し、一部の  $\mathbb{Q}$ -曲線に対してはその保型性を示し、 $\mathbb{Q}$ -モチーフに対しては Tate 予想がその保型性を導くことを示した。この研究は保型形式(解析的対象)と代数体上のモチーフ(幾何的対象物)との対応を主張する Langlands 予想の傍証ともなっている。 $\mathbb{Q}$  上の楕円曲線や  $\mathbb{Q}$ -曲線及び、 $\mathbb{Q}$ -モチーフなどの幾何的な対象物は楕円保型形式と呼ばれるものに対応していた。楕円保型形式は代数群  $GL_2/\mathbb{Q}$  に付随するリーマン面(モジュラー曲線)上のベクトル値調和形式と見做せる。楕円保型形式には重さとレベルが定義されており、この二つを指定することで楕円保型形式に対応する幾何的対象の性質を知ることができる。本研究計画は、私が行ってきた、 $\mathbb{Q}$  モチーフに対する保型性問題の研究を一般の代数体上のモチーフ  $M$  に置き換えて考えたとき、 $M$  に対応する保型形式を特定し、実際、それが対応していることを示すことである。そして、保型形式に対応しているモチーフを理論に見合うだけ豊富に構成することにある。具体例を構成することの意義は、保型形式とモチーフが実際に対応している既知の具体例は少なく、例えば、与えられた Hodge-type を持つモチーフに対して、対応すべき保型形式が構成されていれば、数論の問題に応用が期待できるという点にある。

## 2. 研究の進捗状況

まず、本研究研究課題に沿って行った研究の一部として、次の成果を得たことを述べる。

- (1) ある剛カラビーヤウ多様体に対応するジールパラモジュラー形式の構成
- (2) あるジール多様体の L 関数の計算およびそれに付随するエンドスコピックリフトの構成
- (3) 連続するホッジ数をもつカラビーヤウ多様体の一変数族の構成とそのファイバーの潜在的保型性

当初の目的であった保型形式に対応するモチーフの具体的構成は先ず、志村多様体であるジール多様体の L 関数に着目することで成された。現在では、様々な研究者がテータ埋め込みや多様体のもつ対称性を利用して、具体的な定義方程式を計算している。これらの定義式を用いて L 関数を計算することで、どのような保型形式が対応しているか調べることができる。ジール多様体の L 関数には当然ジール保型形式の L 関数が対応すべきではあるが、ジール多様体の L 関数が楕円保型形式の L 関数で表示される場合がある。その場合期待すべきジール保型形式は楕円保型形式の CAP 型またはエンドスコピック型のリフトになっている。(1)、(2)においては実際にそうなっていることを確認することができた。

また、対称性の高いモチーフの例を豊富に構成する目的から射影空間から 3 点を除いた開曲線  $U$  上の幾つかの階数 1 の局所定数層の畳み込みを用いることで、自然数  $n$  に対して、階数  $n+1$  で重さ  $n$  の超幾何層  $F_n/U$  を構成した。この層のホッジ実現のホッジ層の次数化は階数が 1 で連続になっている。そして  $F_n$  を中間次数にもつような次元  $n$  のカラビ

ヤウ族を構成することに成功した。このような構成は様々な応用を持つことが期待され、実際この族の各ファイバーの潜在的保型性や unit root 公式が得られる。また特別な点での特殊化には面白い多様体を含んでおり整数論に対する成果がいくつも得られた。

### 3. 現在までの達成度

区分②おおむね順調に進展している。

上記研究の進捗状況でも述べたように目標であったモチーフの族の構成とその潜在的保型性が証明でき、またそれらを用いた具体的な研究が遂行されたので、当初の計画通りの研究が遂行できているといえる。

### 4. 今後の研究の推進方策

今後は構成したモチーフの保型性を完全に証明することとする。つまり潜在的という仮定をはずして本当に保型性が確認できるかどうかを研究する。そのためにはセール予想の一般化である乗余保型性問題を精密に定式化しそれを解決する必要がある。そのために必要な研究としてはまず第一に、ガロア表現の乗余表現が可約な場合に保型性持ち上げを示す必要があるので当面はこれを  $GSp_4$  の場合に解決すべく努力したい。

### 5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

[1] F. Sairaiji and T. Yamauchi, The rank of Jacobian varieties over the maximal abelian extensions of

number fields:

Toward Frey-Jarden's conjecture, to appear in the journal of the Canadian Mathematical Bulletin (2010).

(査読あり)

[2] F. Sairaiji and T. Yamauchi, On rational torsion points of central  $Q$ -curves, Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux 20 (2008), 465-483. (査読あり)

[3] T. Yamauchi,  $Q$ -motives and modular forms, Journal of Number Theory 128 (2008) p. 1485-1505. (査読あり)

[4] T. Okazaki and T. Yamauchi, A Siegel

modular threefold and Saito-Kurokawa type lift to  $S_3(\Gamma_{1,3}(2))$ , Mathematische Annalen, 341, p. 589-601 (2008) (査読あり)

[5] T. Yamauchi, An observation on the cyclicity of the group of the  $F_p$ -rational points of abelian surfaces, Algorithmic number theory and its applications, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol. 24 No. 3 (2007), pp. 307-318. (査読あり)

[学会発表] (計 11 件)

1. 研究集会「保型表現と保型  $L$ -関数の数論的研究」

における口頭発表

於 東京大学, 発表者 山内卓也

日時: 平成 22 年 1 月 18 日 (月)

演題: Endoscopic lift to the Siegel paramodular threefold related to Klein's cubic threefold

2. 研究集会「神戸整数論集会」

における口頭発表

於 神戸大学, 発表者 山内卓也

日時: 平成 22 年 1 月 15 日 (金)

演題: A Calabi-Yau family associated to some hypergeometric sheaf and its applications

3. 研究集会「 $p$ -進特殊関数と数論幾何」

における口頭発表

於 蔵王温泉, 発表者 山内卓也

日時: 平成 21 年 10 月 28 日 (水)

演題: 超幾何層に付随する Calabi-Yau 多様体とその応用

4. ミニ・ワークショップ「モジュラー曲線と志村曲線の有理点」

における口頭発表, 発表者 西来路文朗

於 京都大学 総合研究 4 号館 307 号室

日時: 平成 21 年 10 月 26 日 (月)

演題: On rational torsion points of central  $Q$ -curves

(西来路文朗氏 (広島国際大) との共同講演)

5. 東北大学代数学セミナー

における口頭発表

於 東北大学, 発表者 山内卓也

日時: 平成 21 年 7 月 9 日 (木)

演題:  $GSp_4$  に対するセール予想、同伴形式、テータ作用素