

平成 23 年 5 月 12 日現在

研究種目： 若手研究(B)

研究期間： 2007 ~ 2010

課題番号： 19740017

研究課題名 (和文) 保型形式に付随するモチーフの具体的構成に関する研究

研究課題名 (英文)

Research on explicit constructions of motives associated to automorphic forms

研究代表者 山内 卓也 (YAMAUCHI TAKUYA)

大阪府立大学・総合教育研究機構・教育拠点形成教員

研究者番号： 90432707

研究成果の概要 (和文)：

- (1) ある剛カラビヤウ多様体に対応するジーゲルパラモジュラー形式の構成
 - (2) あるジーゲル多様体の L 関数の計算およびそれに付随するエンドスコピックリフトの構成
 - (3) 連続するホッジ数をもつカラビヤウ多様体の一変数族の構成とそのファイバーの潜在的保型性
- (3)に関して説明を加えると、射影空間から 3 点を除いた開曲線 U 上の幾つかの階数 1 の局所定数層の畳み込みを用いることで、自然数 n に対して、階数 $n+1$ で重さ n の超幾何層 F_n/U を構成し、この局所系を中間次数にもつような次元 n のカラビヤウ多様体の U 上の族の構成およびその各ファイバーの潜在的保型性が証明された。

研究成果の概要 (英文)：

- (1) A construction of Siegel paramodular form corresponding to some rigid Calabi-Yau threefold.
 - (2) A construction of endoscopic lifts associated to some Siegel modular variety and a computation of L-function of that variety.
 - (3) A construction of a Calabi-Yau family having continuous Hodge number over the projective line minus three points and potential automorphy of each fiber.
- For (3), we explain more concretely. From local systems of rank one over the open curve U : projective line minus three points, by using convolution we construct hypergeometric sheaves F_n/U of rank $n+1$, weight n for each natural number n and then we construct a Calabi-Yau family whose middle cohomology sheave realizes F_n up to algebraic cycles when n is even. As an application, we prove potential automorphy of each fiber.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	800,000	0	800,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,200,000	720,000	3,920,000

研究分野：整数論

科研費の分科・細目：代数学

キーワード：保型形式、ガロア表現、L関数

1. 研究開始当初の背景

この研究を始めた頃、様々な研究者が変形を持たない剛カラビーヤウ多様体や対称性の高い代数多様体のL関数でそれが楕円保型L関数と対応しているものを計算していた。これは楕円曲線が重さ2の楕円保型形式に対応しているという所謂、志村谷山予想の一般化となっている。これに触発されて、申請者は重さが一般の楕円保型形式に対応するモチーフ(Q-モチーフと名付けた)を特徴付けを行った。その後より一般の幾何的対象を扱い、それがいつ保型的になるか、またそのような幾何的対象が具体的にかつ豊富に構成できるのかという問題を考え始めていた。私は当時、レベル8のモジュラー曲線の普遍楕円曲線のファイバー積から得られる剛カラビーヤウ多様体のユニットルートを計算していたが、この計算はあるホッジF-クリスタルの特別な点での特殊化における計算であることを突き止め、そこから、そのホッジF-クリスタルを実現するカラビーヤウ多様体族を構成するという問題に辿り着いた。

2. 研究の目的

モチーフと呼ばれる幾何的対象があるとそこからガロア表現が構成される。モチーフと保型形式の対応を示す際、このガロア表現の「保型性を示す」ということが基本的な戦略である。そのためには保型性持ち上げ定理(R=T)をより一般の群で確立する必要がある。またセール予想の一般化の定式化、志村多様体の悪い還元での解析なども整備する必要がある。このように、保型性問題をより明確に定式化するにはまだまだ数論幾何学における理論の発展整備が必要であり、このような分野に寄与しながら問題を発展させていくというのが研究目的である。また、保型的なモチーフの具体的な例を構成するという目的はそれ自身重要なことではあるが具体的な数値実験、応用、理論の検証などを考える上で必要不可欠なことである。

3. 研究の方法

研究の方法は保型形式に見合うだけモチーフを構成することから始まる。一般にはこれは難しいことなのでモジュラー曲線やジーゲル多様体の双有理平滑モデルの定義方程式が分かっているものを調べ、(それが知られていなければテータ埋め込みなどで構成

し)、それらのL関数を調べる。そして、どのような保型形式が対応しているか予想し、実際にその保型形式を具体的に構成する。構成の方針であるが、計算できる場合は多様体の中間コホモロジーの次元が小さいため、保型表現論的に安定な保型形式は寄与しない。実際、この研究で計算したジーゲル多様体のL関数は楕円保型形式という種の保型形式で書けることが分かった。ここからCAPリフトかエンドスコピックの場合しか起こり得ないことが推察された。これらは現在ではテータ対応で具体的に構成できることは理論上保障されている。理論上保障されているとはいえ具体的な問題に当てはめて考えることはできないのでシュワルツ関数をうまく選択する作業を行いテータリフトを具体的に計算し、ジーゲル保型形式をいくつか構成した。

これ以外の方法としては代数多様体の族から得られるモチーフを調べることが考えられる。族を考える利点は位相的性質(退化、モノドロミー作用が大きいことなど)を数論的性質に援用できるという点にある。また超幾何関数などに注目することでそれをピカールフックス型微分方程式に実現するような代数多様体族を構成するというのが一つの指針である。また構成した族のファイバーの保型性は近年急速に発展したTaylorのpotential automorphyの定理を援用することで証明することができる。ただし、適用できる多様体のホッジ型に制限が付くのですべての場合に上手く行くとする訳ではない。

4. 研究成果

- (1) ジーゲルパラモジュラー形式の構成
- (2) エンドスコピックリフトの構成
- (3) 超幾何層に付随するカラビーヤウ族の構成
- (4) (3)で構成した族の各ファイバーのpotential automorphy

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 11件)

[1] T. Okazaki and T. Yamauchi, Endoscopic lift to the Siegel paramodular threefold related to Klein's cubic threefold, to appear in American journal of math (査読あり)

[2] T. Yamauchi, A generalization of Sen-Brinon's theory, Manuscripta math. 133, 327-346 (2010) (査読あり)

[3] F. Sairaiji and T. Yamauchi, The rank of Jacobian varieties over the maximal abelian extensions of number fields:

Toward Frey-Jarden's conjecture, to appear in the journal of the Canadian Mathematical Bulletin (2010). (査読あり)

[4] F. Sairaiji and T. Yamauchi, On rational torsion points of central Q -curves, Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux 20 (2008), 465-483. (査読あり)

[5] T. Yamauchi, Q -motives and modular forms, Journal of Number Theory 128 (2008) p. 1485-1505. (査読あり)

[6] T. Okazaki and T. Yamauchi, A Siegel modular threefold and Saito-Kurokawa type lift to $S_3(\Gamma_{\{1,3\}}(2))$, Mathematische Annalen, 341, p. 589-601 (2008) (査読あり)

[7] T. Yamauchi, An observation on the cyclicity of the group of the F_p -rational points of abelian surfaces, Algorithmic number theory and its applications, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol. 24 No. 3 (2007), pp. 307-318. (査読あり)

[学会発表] (計 14 件)

(1). 近畿大学数学講演会, 代表者(大野泰生)における口頭発表
於 東京大学
日 時: 平成 23 年 2 月 14 日 (月)
発表者 山内卓也
演 題: 超幾何層に付随するカラビーヤウ多様体族について

(2). 研究会集「 $GSp(4)$ の数論を中心とした基礎的ワークショップ」, 代表者(落合理)における口頭発表
於 大阪大学
日 時: 平成 22 年 8 月 6 日 (金)
発表者 山内卓也
演 題: $GSp(4)$ の肥田理論の紹介

(3). 東大数理セミナー -- 保型形式の整数論月例セミナー, 代表者(織田孝幸)における口頭発表

於 東京大学

日 時: 平成 22 年 5 月 15 日 (土)

発表者 山内卓也

演 題: 超幾何層に付随するカラビヤウ多様体とその応用について

(4). 研究会集「保型表現と保型 L -関数の数論的研究」

における口頭発表

於 東京大学, 発表者 山内卓也

日 時: 平成 22 年 1 月 18 日 (月)

演 題: Endoscopic lift to the Siegel paramodular threefold related to Klein's cubic threefold

(5). 研究会集「神戸整数論集会」

における口頭発表

於 神戸大学, 発表者 山内卓也

日 時: 平成 22 年 1 月 15 日 (金)

演 題: A Calabi-Yau family associated to some hypergeometric sheaf and its applications

(6). 研究会集「 p -進特殊関数と数論幾何」, における口頭発表

於 蔵王温泉「ゆと森倶楽部」

日 時: 平成 21 年 10 月 28 日 (水)

講演者: 山内卓也

演 題: 超幾何層に付随する Calabi-Yau 多様体とその応用

(7). 2009 整数論サマースクールにおける

口頭発表 於 京都アピカルイン

日 時: 平成 21 年 8 月 19 日 (月)

講演者: 山内卓也

演 題: ガロア表現概説 I

(8). 東北大学代数学セミナーにおける口頭発表 於 東北大学

日 時: 平成 21 年 7 月 9 日 (木)

講演者: 山内卓也

演 題: GSp_4 に対するセール予想、同伴形式、テータ作用素

(9). 勉強会「最近の変形理論の現状について」における口頭発表 於 広島大学

日 時：平成 20 年 2 月 29 日 (金)

講演者：山内 卓也

演 題：有限平坦群スキームの分類と枠付き変形環 II

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山内 卓也 (YAMAUCHI TAKUYA)

大阪府立大学・総合教育研究機構・教育拠点形成教員

研究者番号：90432707