様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　２１年　６月１２日現在

研究種目： 若手研究（B）
研究期間： 2007～2008
課題番号： 19740022
研究課題名（和文）　代数曲面の被覆とそのガロア閉包の不変量公式

研究課題名（英文）　Coverings of algebraic surfaces and the formula for invariants of its Galois closures

研究代表者
石田　弘隆（ISHIDA　HIROTAKA）
宇部工業高等専門学校・一般科・准教授
研究者番号：30435458

研究成果の概要：複素代数曲面の研究において，代数曲面の２重被覆の理論は重要な役割を果たしてきた．この理論と同様の理論を被覆次数が３以上の代数曲面の被覆について構築を試みた．その成果として，３次対称群被覆，双２重被覆や巡回４重被覆のデータの表し方を整理し，特異点解消プロセスと不変量公式を与えた．また，被覆の理論を利用し，３重被覆の分岐因子や有理曲面上の特異曲線に関する具体的問題を解決することが出来た．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	600,000	0	600,000
２００８年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,100,000	150,000	1,250,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：代数幾何

１．研究開始当初の背景

代数曲面の分類の研究では，堀川（E. Horikawa : On deformations of quintic surfaces, Invent. Math. 31 (1975), 43－85.）による代数曲面の２重被覆の理論は重要な役割を果たしてきた．例えば，実在する代数曲面の不変量のオイラー・ポアンカレ標数と標準因子の自己交点数の組の座標平面上での存在領域に関する問題において，代数曲面が代数曲面の２重被覆として構成されている．また，報告者のスロープ４の超楕円曲線族のファイバーの種数と相対的オイラー・ポアンカレ標数の間の不等式に関する論文（H.Ishida : Bound of the relative Euler-Poincaré characteristic for certain hyperelliptic fibrations, manuscr. math. 118 (2005), 467－483.）においても，２重被覆の理論を用いて解決に至っている．
その他にも，重複度２の２次元特異点に関するダーフィーの予想（特異点の幾何種数とミルナー数の間の不等式）の解決もされている．（Ｔ． Ashikaga : Normal two-dimensional hypersurface triple points and the Horikawa type resolution, Tohoku Math. J.

44 (1992), 177‐200.）このように，代数曲面論のみではなく，特異点論にも応用されている．

一方で，４次曲線族などのように２重被覆の構造を自然に導入することの出来ない代数曲面は多く，２重被覆の理論だけではさらなる代数曲面論や特異点論の発展は難しいと思われた．

そこで，被覆次数が３以上の被覆に関する研究に着目すると，一般の被覆次数に適用することの出来る理論は構築されていなかったが，３重被覆に関する先行研究(S. L. Tan : Triple covers on smooth algebraic varieties, Geometry and Nonlinear Partial Differential Equations AMS/IP Studies in Advaced Mathematics 29 (2002), 143‐164. 等)が存在しており，基礎理論は完成しつつあった．しかし，２重被覆の被覆を与えるデータは代数曲面上の有効因子であったが，３重被覆の被覆データはより複雑であり，具体的な問題への適用することが難しい状況であった．

また,スロープ４の超楕円曲線族のファイバーの種数と相対的オイラー・ポアンカレ標数の関係に関して，既に証明していた不等式を満たす不変量の組であっても，実際に曲線族が存在しない場合があることを把握していた．

２．研究の目的

１．で述べたように，被覆次数が３以上の被覆に関する研究は被覆次数が３の研究はいくつかあるものの具体的問題への適用という点では難点を残していた．そこで，本研究課題では被覆次数３以上である代数曲面の被覆の基礎理論の構築を目的とする．特に，巡回４重被覆，双２重被覆，３次対称群被覆などの被覆に絞って以下の３点を遂行することを主な目的とした．

（１）被覆のデータの簡単な表し方を考察する．

（２）被覆のもつ特異点の解消プロセスの構成を行う．

（３）解消後の代数曲面のオイラー・ポアンカレ標数と標準因子の自己交点数の計算公式を与える．

目的（１）は目的（３）における計算公式の簡略化を模索するものである．被覆を構成する方法が変われば，被覆のデータの取り方が異なる．3 重被覆に関する先行研究でも，3 重被覆データの表し方は異なる．本研究課題では，今後諸問題に適用することが容易となるようにデータの表し方を簡略化していく．

３次対称群被覆については，2006 年度から引き続きの研究でもある．

また，先行研究や本研究課題の成果を用いて，以下のような具体的な問題に応用することも目的である．

（4）スロープ４の超楕円曲線族のファイバーの種数と相対的オイラー・ポアンカレ標数の組の座標平面上での存在領域を確定する．

（5）有理曲面上のある特異曲線が存在することを証明する．

目的（4）は報告者が以前から研究していた問題の発展である．背景でも述べたように，不変量の組の座標平面上での存在領域は単なる不等式だけでは記述できないことが判明していた．そこで，この点を明らかにしたいと考えた．また，目的（4）では，今後の被覆の構造をもつ代数曲線族のファイバーの種数と相対的オイラー・ポアンカレ標数などの不変量の研究のモデルケースとしていく．

目的（5）は，飯高（S. Iitaka : On logarithmic plurigenera of algebraic plane curves）による，対数的２−種数に関する有理曲面上の分類の研究の発展を目的としている．

対数的２‐種数の値により，有理曲面上の非特異曲線はそれと双有理同値なヒルツェブルフ曲面上の特異曲線で分類することができる．しかし，分類に現れたヒルツェブルフ曲面上の特異曲線の中には実在するかどうかが未知である曲線が存在する．これらの存在性を確定し，分類表を完成させる．

３．研究の方法

2007 年度の研究では，３次対称群被覆，双２重被覆や巡回４重被覆に関して目的（1），（2），（3），応用に関して目的（4）を遂行した．

$f : X \to Y$ を正規代数曲面 X から非特異代数曲面への被覆とする．代数曲面 X, Y の有理関数体をそれぞれ K(X), K(Y) とおく．体の拡大 K(X)/K(Y) がガロア拡大，で Gal(X/Y) が３次対称群，$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であるとき, f をそれぞれ３次対象群被覆，巡回４重被覆，双２重被覆という．

f が３次対称群被覆であれば，Gal(X/Y) に位数２の元σが属する．$g : X \to Z$ をσの生成する群による X の幾何学的商，$h : Z \to Y$ を自然な射とする．

このとき, $f = g \cdot h$ が成り立ち，g は２重被覆，h は非ガロア３重被覆であることがわかる．従って，すべての３次対象群被覆はある正規

代数曲面の３重被覆のガロア閉包であることが分かる．特に，K(Z)=K(Y)(z) かつ z の最小多項式は $z^3-3sz+2t$ である．

また，３次方程式のカルダノの公式から，K(X)＝K(Y)(w) かつ w の最小多項式は $w^6+2tw^3-s^3$ である．ここで，K’を K(Y) 上 w^3+t が生成する体とし，g’：W → Y をを Y 上の K’−正規化とする．このとき，自然な射 h’：X → W が存在し， f ＝h’･g’であることが分かる．従って，３次対称群被覆の構造は巡回３重被覆 h’と２重被覆 g’との合成であること分かる．このことを利用して，既存の２重被覆の理論と巡回３重被覆の理論を元に３次対象群被覆の特異点解消プロセスと不変量公式を与える．

また，巡回４重被覆と双２重被覆も３次対称群被覆と同様に構造を調べると，共に２つの２重被覆の合成により得られることが分かるので，２重被覆の理論を用いて特異点解消プロセスと不変量公式を与える．

目的(４)に関しては，スロープ４の超楕円曲線族のファイバーの種数と相対的オイラー・ポアンカレ標数の組の座標平面上での存在領域がどの程度であるかを大まかに調べるために具体的に超楕円曲線族を数多く構成することから始めた．計算を進めていくと，相対的オイラー･ポアンカレ標数の値が大きいものは構成することが可能であると予想できた．この定理を実現するためには多くの２重被覆のデータである分岐因子を構成する必要がある．そのために，以下の補題をはじめに証明することとした．

補題１　$\Sigma_{j=1}^{g+1} l_j = 2d(g+1)$ を満たす g+1 個の０以上の整数の組 $\{l_j\}$ に対して，次の 3 条件 (i),(ii),(iii)を満たす有効因子の組 $\{C_k\}$ が存在する．

(i) C_k は０切断に線形同値であり，０切断と横断的に交わる．

(ii) C_k は互いに横断的に交わる．

(iii) j=1,2,…,g+1 に対して，$\Sigma_{k=1}^{g+1} C_k$ は０切断上に通常 j 重点を l_j 個もつ．

$\mu : \Sigma_d \to \Sigma_{2d}$ を０切断と無限遠切断を分岐因子とする２重被覆とする．上の補題により得られた $\{C_k\}$ をとると，被覆の逆像 $\mu^*\Sigma_{k=1}^{g+1} C_k$ は 2-fold j 重点を l_j 個もつ．ここで，2-fold j 重点とはその点を中心とするブローアップにより通常 j 重点に解消することのできる特異点をいう．これらの有効因子を分岐因子とする d 次ヒルツェブルフ曲面の２重被覆から得られる超楕円曲線族 f のファイバーの種数は g であり，相対的オイラー・ポアンカレ標数 χ と相対標準因子 K^2 の自己交点数はそれぞれ以下の値であることを示すことができる．

$$\chi = \frac{d}{2} g(g+1) - \Sigma_{j=3}^{g+1} \frac{j(j-2)}{4} l_j - \Sigma_{j\geq 3, j:\mathrm{odd}} \frac{l_j}{4}$$

$$K^2 = 2d(g^2-1) - \Sigma_{j=1}^{g+1} (j-2)^2 l_j$$

このうち，スロープが４である条件式を求めると，

$$2d(g+1) = \Sigma_{j=1}^{g+1}(2j-4)l_j + \Sigma_{j\geq 3, j:\mathrm{odd}} l_j$$

となる．従って，上の式を満たす正の整数の組 $\{l_j\}$ を与えることと，スロープ４の超楕円曲線族を与えることが同値となる．

この整数の組を数多く与え，三角数の性質を用いることにより，相対的オイラー・ポアンカレ標数 χ のとる値の範囲を調べた．

2008 年度の研究では，応用に関しては目的（５）を遂行し，特に以下の定理にあらわれる特異曲線を扱った．

定理２（飯高）　S が複素非特異有理曲面とする． S と S 上の非特異代数曲線 C の対（S,C）に対して，C の対数的２−種数が２であるとする．このとき，C の種数は０または１である．C の種数が１のときは以下のいずれかの対として双有理同値ある．

(a−１）射影平面上の９個の３重点をもつ３m次曲線（m≧２）

(a−２）d 次ヒルツェブルフ曲面上の７個の４重点，２個の３重点をもつ $8H_\infty+(8+4d)F$ に線形同値な曲線　(d=0,1,2)

(a−３）d 次ヒルツェブルフ曲面上の７個の３重点，３個の２重点をもつ $6H_\infty+(6+3d)F$ に線形同値な曲線　(d=0,1,2)

(a−４）d 次ヒルツェブルフ曲面上の 11 個の３重点，３つの２重点をもつ $4H_\infty+(5+2d)F$ に線形同値な曲線　(d=0,1,2)

ただし，H_∞, F をヒルツェブルフ曲面の無限遠切断とファイバーの線形同値類とする．

この分類表にある特異曲線の構成を 2007 年度での分岐因子の研究の知見を元に遂行した．構成の方法は分岐因子の構成と同様に被覆の逆像を用いて構成した．ここでは２重被覆だけではなく，３重被覆も用いている．

４．研究成果

非特異代数曲面 Y 上の３つの有効因子の組

（A, B_1, B_2）が以下の条件を満たす因子 L,M をもつとき，巡回４重被覆データという.

$$B_1 + B_2 \sim 2L$$
$$2A + B_1 + 3B_2 \sim 4M$$

巡回４重被覆データ（A, B_1, B_2）に対して，p：Z → Y を分岐因子が $B_1 + B_2$ である２重被覆，q：X → Z を分岐因子が $p^*(A + \frac{B_1 + B_2}{2})$ である２重被覆とすると，

p・q は代数曲面 X から Y への巡回４重被覆である．すべての巡回４重被覆は上のように与えられることも示した．また，以下のようにデータの極小性を定める.

定義３　巡回４重被覆データ（A, B_1, B_2）に対して，$B_1 + B_2$ が被約であるとき巡回４重被覆データ（A, B_1, B_2）は極小であるという.

このとき，次の補題が成り立つ.

補題４　巡回４重被覆データが極小であるとき，X は正規である．また，任意の正規代数曲面 X から非特異代数曲面 Y への巡回４重被覆は極小データにより与えられる.

補題５　巡回４重被覆データ（A, B_1, B_2）に対して A，$B_1 + B_2$ が特異点もたないとき，

X は特異点として高々有理２重点のみを正規代数曲面である.

また，Y の点 P を中心とするブローアップ ν：Y’ → Y とするとき，Y’上の巡回４重被覆データ（$\nu^* A, \nu^* B_1, \nu^* B_2$）により定まる巡回４重被覆の正規化は以下の極小４重被覆データから定まることも示した.

$$A' = \nu^* A + (2m_P - n_{1,P} - n_{2,P})\varepsilon$$
$$B'_1 = \nu^* B_1 + (n_{2,P} - m_P - n_{1,P})\varepsilon$$
$$B'_2 = \nu^* B_2 + (n_{1,P} - m_P - n_{2,P})\varepsilon$$

ここで，有効因子 D に対して，ε は Y’の例外因子，m_P (D)は D の P における重複度,

$$m_P = m_P(B_1 + B_2)$$
$$n_{1,P} = [\frac{m_P + m_P(A) + m_P(B_1)}{2}]$$
$$n_{2,P} = [\frac{m_P + m_P(A) + m_P(B_2)}{2}]$$

であるとする.（[a]は a を超えない最大の整数とする.）

非特異代数曲面 Y の極小巡回４重被覆データ（A, B_1, B_2）から定まる巡回４重被覆に対して，A，$B_1 + B_2$ の特異点 P を中心とするブローアップ ν：Y’ → Y とすると，Y’上の正規巡回４重被覆をとることができる.

この新しい巡回４重被覆の極小データを（A', B'_1, B'_2）とする．巡回４重被覆データ（A', B'_1, B'_2）に対して，同様の操作を繰り返し行えば，有限回のステップで得られた巡回４重被覆データ（$\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{B}_2$）は $\bar{A}$，$\bar{B}_1 + \bar{B}_2$ が特異点をもたないようにすることができる．巡回４重被覆データ（$\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{B}_2$）により定まる巡回４重被覆は高々有理２重点のみをもつ．有理２重点の特異点解消は良く知られているので，この方法により特異点解消プロセスが構築できる．また，各ステップにおける巡回４重被覆データの計算公式は上で与えられているので，これを元に不変量の計算公式も与えることができる.

また，双２重被覆や３次対称群被覆についても，同様の形式の解消プロセスを構築し，不変量公式を得ることができた.

この研究により，代数曲面の被覆次数の小さいガロア被覆については特異点解消プロセスと不変量公式を得ることが出来た．これらを用いて，具体的な特異点などの問題や，ガロア被覆の分岐因子の特徴づけ等の問題に応用することができると思われる.

さらに，被覆の応用として，超楕円曲線族に関する次の定理も得た.

定理６　以下の(i)または(ii)の性質を満たす正の整数の組(g,z)に対して，スロープ４，ファイバーの種数が g，相対的オイラー・ポアンカレ標数が z である相対的極小超楕円曲線族が存在する.

(i)　g は６以上の偶数かつ $z \geq g^2 + g/2 - 2$

(ii)　g は５以上の奇数かつ $z \geq g^2 - 1$

この成果により，相対的オイラー・ポアンカレ標数の値が十分大きいとき，スロープ４の超楕円曲線族が存在することが証明できた．一方，この定理の条件(i)，(ii)にある g の２次式を任意の１次式に変更した場合には上の定理は成り立たないことも証明できる．つまり，この定理は g の次数に関して最良であることも分かる.

今後の展望としては，この定理では示されていない相対的オイラー・ポアンカレ標数の値が小さい場合を扱い，存在領域の完全な確定が目標となる．また，超楕円曲線族の構造に着目したが，超楕円曲線族を一般化すると，射影直線束の被覆で与えられる曲線族となる．そこで，スロープ，相対的オイラー・ポ

アンカレ標数，ファイバーの種数の関係と存在領域の問題を双２重被覆，巡回４重被覆や３次対称群被覆の場合に考察することも今後の課題である．

2008 年度の主な成果として次の定理が挙げられる．

定理　定理２の(a−１)，(a−２)，(a−３)，(a−４）の特異曲線はすべて存在する．

この定理により，複素非特異有理曲面 S 上の非特異代数曲線 C で対数的２−種数が２，種数が１であるものは４つの型に分類でき，いずれも存在することが証明できた．

対数的２−種数による代数曲線の分類において，代数曲線の存在性が確定せず，分類表も完全なものとならないことは多い．2008 年度の被覆の代数曲線の構成への応用の研究の手法を用いれば，その他の分類表の完成も見込めるものと期待する．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① H. Ishida，H. Tokunaga : Triple covers of algebraic surfaces and a generalization of Zariski's example, Adv. Stud. Pure Math.（掲載決定），2009,（査読あり）

② 石田　弘隆：分岐被覆による特異曲線の構成，平面代数曲線の双有理的研究，2009 年，167 - 176.（査読なし）

③ 石田　弘隆：楕円曲線族の構造をもつ一般型曲面の不変量に関する注意，射影代数多様体の幾何とその周辺 2007，2007 年，49 - 58.（査読なし）

〔学会発表〕（計５件）

① H. Ishida : Constructions of certaion singular curves with geometric genus one, 特異点と多様体の幾何，草津セミナーハウス，2008 年 9 月 13 日.

②石田　弘隆：被覆による特異曲線の構成，津山代数幾何シンポジューム「代数幾何の研究と高専生による数学研究の出会い」，津山工業高等専門学校，2008 年 8 月 26 日.

③石田　弘隆：ある特異平面曲線の構成について，分岐被覆に関する代数幾何とトポロジー(第 2 回)，首都大学東京，2008 年 1 月 12 日.

④石田　弘隆：超楕円曲線族の構造をもつ一般型曲面の不変量に関する注意，射影代数多様体の幾何とその周辺，高知グリーン会館，2007 年 11 月 24 日.

⑤石田　弘隆：2 重被覆によるスロープ 4 の超楕円曲線束の構成について，分岐被覆に関する代数幾何とトポロジー(第 1 回)，東北学院大学，2007 年 6 月 9 日.

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕
なし

６．研究組織
(1)研究代表者

石田　弘隆（ISHIDA　HIROTAKA）
宇部工業高等専門学校・一般科・准教授
研究者番号：30435458