様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　６月１６日現在

研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：2007～2009
課題番号：19740023
研究課題名（和文）微分方程式と微分幾何学の双対性に関する特異点論的研究

研究課題名（英文）Duality of differential equations and differential geometry from the view point of singularity theory

研究代表者
高橋　雅朋（ TAKAHASHI　MASATOMO ）
室蘭工業大学・大学院工学研究科・講師
研究者番号：80431302

研究成果の概要（和文）：微分方程式に関しては、定性理論を研究し、n 階の implicit な常微分方程式に対して、完全解が存在するための必要十分条件や幾何学解の一意性が成り立つための条件を求めました。また、２階の完全積分可能な常微分方程式に対してタイプの分類を行い、それぞれのタイプに対して、幾何学的解や特異解の存在条件を求めました。微分幾何学に関しては、エンゲル・ルジャンドル変換による接線曲面の生成的な分類を行いました。また、焦面と波面との関係を記述し、部分多様体の幾何学的な性質を調べました。

研究成果の概要（英文）：We have studied a qualitative theory for implicit ordinary differential equations and given existence and uniqueness conditions for complete solutions of implicit ordinary differential equations. Moreover, we classified types of completely integrable second order implicit ordinary differential equations. We also have studied differential geometry and given generic classifications of tangent surfaces of Legendre curves and null curves respectively. Furthermore, we gave relationship between caustics of submanifolds and of a canal hypersurface of the submanifolds.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	1,200,000	0	1,200,000
２００８年度	1,000,000	300,000	1,300,000
２００９年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	3,100,000	570,000	3,670,000

研究分野：特異点論

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：特異点、微分方程式、微分幾何学、ルジャンドル特異点論、ラグランジュ特異点論、エンゲル・ルジャンドル変換、波面、焦面

１．研究開始当初の背景

特異点(特異点論)は正則性に付随する概念であり、可微分写像の場合では逆写像定理により局所的に標準形とならない場合、つまり階数が落ちる点として認識されます。より一般的に写像を扱う場合には必ず現れる概念で、グラフの形状を認識するときも、関数のグラフを考えてみれば特異点に注目していることが分かります。特異点論は主に２０世紀後半に整備され現在成長中の分野です。

一方、双対性とは考えたい対象を次元が高い対象の射影と考え、次元が高い空間での「何らかの変換」を通して再び射影することで新たな対象として捉えること(また、その逆変換)をいいます。双対性は、古くから図形に対する双対性(点と線の双対性)がよく知られており、射影空間内の曲線の双対性に関してはルジャンドル特異点論と関係があり、その特異点や曲線の接線曲面の分類等、国内外で詳しく研究されています。例えば、３次元射影空間におけるルジャンドル変換による双対性は曲線の点と接線の双対性と考えることができます。特異点を持っていない写像(はめ込み)に対しても射影することにより特異点を持つことがありますので、双対性を研究するために特異点論を用いて研究することは自然かつ必要な研究といえます。

２．研究の目的

「微分方程式と微分幾何学の双対性に関する特異点論的研究」では特異点論的手法を用いて２つの分野に対して双対性をテーマに研究を行うものです。特に特異点または特異性に注目して研究を行い、新たな性質、不変量、分類や関係を見つけることを目標とします。具体的に次の２つの双対性を研究します。

(1) １つは「エンゲル・ルジャンドル変換」と呼ばれる変換で４次元多様体上のエンゲル構造に対する双対性です。この変換はimplicitな２階の常微分方程式の解曲線(エンゲル曲線)の双対あるいはimplicitな１階の常微分方程式の解曲線(ルジャンドル曲線)と３次元ミンコフスキー空間内のヌル曲線との双対性をもたらします。この双対性に対して、特異点論的手法を用いて研究を行います。ミンコフスキー空間内のヌル曲線に対して、フネレ・セレ型の公式があり微分幾何学として研究されていますが、特異点論的研究はまだ未開発ですのでヌル曲線に対する特異点論的研究を行います。特に、ルジャンドル曲線とヌル曲線を中心にエンゲル・ルジャンドル変換を用いて滑らかな曲線だけでなく特異点を持つ曲線に対しても性質や微分幾何学を構成することが目的です。具体的には、

① ルジャンドル曲線とヌル曲線に対する微分幾何学を構成します。ヌル曲線に対してはフレネ・セレ型公式があり、その曲率(本質的に１つ)がヌル曲線の不変量になっています。そこでまず対応するルジャンドル曲線に対してもフレネ・セレ型の公式を構成し不変量を与えることを考察します。双対性によりルジャンドル曲線に対して曲率は本質的に１つであると予想されますが、これらの曲率がエンゲル・ルジャンドル変換を行った曲線に対しても対応する不変量となるのか、それぞれの曲率の関係を記述することが目的です。また射影空間に対するマスロフ指数のように、その曲率を積分した値とある方向へ射影した曲線との回転数の関係を記述することも具体的な目的です。さらにエンゲル曲線に対してもフレネ・セレ型の公式を構成し、この曲率に対してもエンゲル・ルジャンドル変換を行ったときの不変量の関係，またルジャンドル曲線とヌル曲線の曲率との関係を明らかにすることが目的です。

② ルジャンドル曲線とヌル曲線に対して接線曲面が定義されます。それぞれの曲線に対

する双対性と接線曲面に対する双対性の関係を調べます。具体的にはそれぞれの生成的な曲線に対して、対応する接線曲面とその双対接線曲面の分類を行うことを目的とします。射影空間の場合、その分類結果は対称的であることが知られています。しかしこの双対性の場合、構造が違う空間に対しての双対性ですから対称性が破れている可能性がありますので、このことを明らかにします。

③　ルジャンドル曲線は implicit な１階常微分方程式の幾何学的解としてエンゲル曲線は implicit な２階常微分方程式の幾何学的解として捉えることができます。そこで、常微分方程式が解を持つための条件や性質を考察する必要があります。さらに、より詳しい implicit な常微分方程式の性質や分類を研究し双対性の性質を調べることも目的です。また、ヌル曲線に対しては次の双対性とも関連があります。

(2) もう１つは「擬球面内のルジャンドル変換」と呼ばれる変換でミンコフスキー空間内の３つの擬球面(双曲空間、ド・シッター空間、光錐)内の空間的超曲面に対するルジャンドル双対性です。上述のルジャンドル変換は射影空間と双対射影空間の双対性(一般に P^n と(P^n)^*)ですが、この擬球面内の双対性はそれぞれに対して双対性が考えられます。つまり、双曲空間とド・シッター空間、双曲空間と光錐、ド・シッター空間と光錐、さらに自己双対としてド・シッター空間とド・シッター空間、光錐と光錐が考えられます。双曲空間と双曲空間はミンコフスキー空間の計量が(－＋･･･＋)なので空間的超曲面に対しては考えることは出来ませんが、これら５つの双対性があるといえます。現在までに、この双対性を用いてそれぞれの擬球面内での空間的超曲面に対して縮平面や平行曲面を統一的に定義することができました。また、それぞれのモデル曲面との接触の様子もラグランジュ・ルジャンドル特異点論を用いることにより記述することができました。ここでは、この双対性を用いて、一般的な部分多様体に対して、より詳しい性質を研究することが目的です。それぞれの擬球面内の空間的超曲面に対して研究しましたので、一般的に空間的な部分多様体に対してルジャンドル双対性を用いて、その縮平面や平行曲面など統一的に研究します。特に部分多様体とモデル曲面との接触の様子を記述することを目的とします。

３．研究の方法

　統一的な研究方法は、特異点または特異性に注目して研究を行うことです。

(1)①　ルジャンドル曲線とヌル曲線に対する微分幾何学の構成を行います。特にそれぞれの曲線に対して不変量を構成し、その関係を考察します。ユークリッド空間内の曲線に対してフレネ・セレの公式がありますが、ルジャンドル曲線に対しても接触構造により、接触平面内に誘導される計量(内積)を用いて接線方向と直交する方向があります。また接触平面と横断的に基底を取ることができますので、この基底を用いることにより曲率の定義し、フレネ・セレ型の公式を作ることが可能となります。一方、ヌル曲線に対してはフレネ・セレ型の公式があり、本質的に曲率は１つですのでこの結果を用い、エンゲル・ルジャンドル変換を通して対応している曲率が何であるか調べます。また、ある方向への曲線の射影の回転数が曲率の積分で与えられることができるか調べます。これは射影空間の場合と同様な手法を用いて考察することができると思われます。さらに、エンゲル曲線に対してもエンゲル構造を用いてフレネ・セレ型の公式を作ることが可能ですので、その曲

率とルジャンドル曲線の曲率またはヌル曲線の曲率との関係をこれまでの結果を用いて調べます。特に、この結果により特異点を持つルジャンドル曲線とヌル曲線に対して曲率を導入することが可能となります。

②　ルジャンドル曲線とヌル曲線に対する接線曲面の性質を考察します。エンゲル曲線を与えた時、ルジャンドル曲線かヌル曲線のどちらかがはめ込みとなりますので、この性質を用いて接線曲面とその双対接線曲面を定義します。まずは射影空間の接線曲面とその双対接線曲面の分類結果とその手法を用い、生成的な曲線に対して接線曲面と双対接線曲面の微分同相(あるいは同相)での分類を行います。微分同相(あるいは同相)の分類の結果により対称性が破れているかどうか調べることができますので行います。

③　エンゲル・ルジャンドル変換に関係する implicit な２階の常微分方程式の理論はまだ不十分ですので、この理論を整備することを考えます。特に完全解の分類問題を考察します。また、一般の implicit な常微分方程式の定性理論の研究を特異点論を用いて行います。

(2)　擬球面内の空間的部分多様体に対しては、その管状超曲面を考えることにより空間的超曲面の理論を適応することができます。管状超曲面の性質を調べることにより、もとの部分多様体の性質を調べることが具体的な方法です。特にルジャンドル双対性を用いて光錐内の部分多様体の性質を調べることができます。双曲空間内の空間的部分多様体とモデル曲面との接触の様子を記述しましたが、この方法では縮閉面に対する接触の様子を記述できませんでした。しかしラグランジュ・ルジャンドル理論を応用することにより縮閉面や平行曲面に対する接触の様子を記述することができると思われ、統一的に空間的部分空間と擬球面内のモデル曲面との接触の様子を記述することを行います。

４．研究成果

(1)①　ルジャンドル曲線とヌル曲線のフルネ・セレ型の公式を作り、その対応を調べました。局所的には曲率は対応していますが、大域的に対応しているかは今後の課題です。また、エンゲル曲線となる、ルジャンドル曲線とヌル曲線の回転数を定義しました。

(1)②　ルジャンドル曲線とヌル曲線から決まる接線曲面を定義し、射影構造を考えることで、それぞれの接線曲面の生成的な分類を微分同相（同相）で行いました。その結果、今まで生成的には現れない新たな特異点が現れ、さらにその対称性が破れていることが分かりました。

(1)③　n 階の implicit な常微分方程式に対して、完全解が存在するための必要十分条件や幾何学解の一意性が成り立つための条件を求めました。また、２階の完全積分可能な常微分方程式に対してタイプの分類を行い、それぞれのタイプに対して、幾何学的解や特異解の存在条件を求めました。これらの結果は、implicit な常微分方程式の定性理論の礎となります。

(2)　ラグランジュ・ルジャンドル理論を用い、焦面と波面との関係を記述し、ユークリッド空間内の超曲面に対して、焦面(縮平面)とモデル超曲面との接触の様子を求めました。さらに、ユークリッド空間内の部分多様体の焦面と、その管状超曲面の焦面の関係を求めました。その結果、局所的には一致することが分かりました。これらの結果はユークリッド空間内の部分多様体に対してですが、双曲空間内またはド・シッター空間内の空間的部分多様体に対しても同様の結果が成り立ちます。しかし、光錐内の部分多様体に対

してはルジャンドル双対性が使えませんので、この場合は今後の課題です。焦面と波面の関係は様々なところで応用される可能性があり、その応用も今後の課題です。

また、双曲空間とド・シッター空間内の空間的・時間的曲面に対する、折り目写像を定義し、これらの曲面の性質を焦面の特異点の性質で記述しました。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１０件）

① S. Izumiya, M. Takahashi, F. Tari, Folding maps on spacelike and timelike surfaces and duality. To appear in Osaka Journal of Mathematics. 査読有.

② S. Izumiya, K. Saji, M. Takahashi, Horospherical flat surfaces in Hyperbolic 3-space. To appear in Journal of the Mathematical Society of Japan. 査読有.

③ Masatomo Takahashi, A sufficient condition that contact equivalence implies right equivalence for smooth function germs. Houston Journal of Mathematics. Vol. 35 (2009), 829--833. 査読有.

④ S. Izumiya, M. Takahashi, Caustics and wave front propagations: applications to differential geometry. Banach Center Publications. Geometry and topology of caustics. Vol. 82 (2008), 125--142. 査読有.

⑤ Y. Machida, M. Takahashi, Classifications of implicit second order ordinary differential equations of Clairaut type. The Royal Society of Edinburgh Proceedings A (Mathematics). Vol. 138 (2008), 821--842. 査読有.

⑥ K. Saji, M. Takahashi, Singularities of smooth mappings with patterns. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Proceedings A (Mathematics). Vol. 137 (2007), 415--430. 査読有.

⑦ Masatomo Takahashi, On completely integrable first order ordinary differential equations. Proceedings of the Australian-Japanese Workshop on Real and Complex singularities. (2007), 388--418. 査読有.

⑧ Masatomo Takahashi, On complete solutions and complete singular solutions of second order ordinary differential equations. Colloquium Mathematicum. Vol. 109 (2007), 271--285. 査読有.

⑨ S. Izumiya, M. Takahashi, Spacelike Parallels and Evolutes in Minkowski pseudo-spheres. Journal of Geometry and Physics. Vol. 57 (2007), 1569--1600. 査読有.

⑩ M. Takahashi, On implicit second order ordinary differential equations: Completely integrable and Clairaut type. Journal of Dynamical and Control Systems. Vol. 13 (2007), 273--288. 査読有.

〔学会発表〕（計８件）

① 高橋雅朋、On caustics of surfaces and canal hypersurfaces, 可微分写像の特異点論とそれに関連する幾何学、２００９年１２月９日、日本大学文理学部

② 高橋雅朋、常微分方程式と特異点 II、Symplectic Geometry とその周辺、２００９年１１月２６日、岐阜経済大学

③ Masatomo Takahashi, Completely integrable implicit ordinary differential equations, 1st Workshop on Singularities in Generic Geometry and Applications, ２００９年３月２７日、Spain (Valencia)

④ Masatomo Takahashi, Completely integrable implicit ordinary differential equations, 10th International Workshop on Real and Complex Singularities, ２００８年７月３０日、Brazil (ICMC-USP, Sao Carlos)

⑤ 高橋雅朋、Duality and horospherical flat surfaces in hyperbolic 3-space、部分多様体の微分幾何学およびその周辺領域の研究、２００８年６月２４日、京都大学数理解析研究所

⑥ 高橋雅朋、Existence of geometric solutions for implicit ordinary differential equations、日本数学会、２００８年３月２５日、近畿大学

⑦ 高橋雅朋、常微分方程式と特異点、Symplectic Geometry とその周辺、２００７年１１月１４日、岐阜経済大学

⑧ Masatomo Takahashi, On implicit ordinary differential equations, 10th International Conference on Differential Geometry and its Applications, ２００７年８月２７日、Czech Republic (Olomouc)

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://www.mmm.muroran-it.ac.jp/~masatomo/Index.html

６．研究組織
(1)研究代表者
高橋　雅朋（TAKAHASHI MASATOMO）
室蘭工業大学・大学院工学研究科・講師
研究者番号：80431302

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：
(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：