

平成 22 年 4 月 1 日現在

研究種目： 若手研究 (B)

研究期間： 2007~2010

課題番号： 19740025

研究課題名 (和文) 射影埋め込みによるラグランジアンファイブレーションの研究

研究課題名 (英文) Study of Lagrangian fibrations via projective embeddings

研究代表者

野原 雄一 (NOHARA YUICHI)

東北大学・大学院理学研究科・助教

研究者番号： 60447125

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・幾何学

キーワード： Gelfand-Cetlin 系、トーリック退化

1. 研究計画の概要

シンプレクティック多様体上のラグランジアンファイブレーションと、幾何学的量子化などのそれに関わる幾何学的構造を調べる。特異ファイバーの存在などにより一般の場合を扱うのは困難なため、以下の具体的な場合を詳しく理解することを目的とする。

- (1) 旗多様体上の Gelfand-Cetlin 系と呼ばれるラグランジアンファイブレーション (完全可積分系) を、旗多様体のトーリック多様体への退化を通して調べる。
- (2) $K3$ 曲面の特殊ラグランジアンファイブレーションの、 $K3$ 曲面の退化の下での挙動を解析する。

2. 研究の進捗状況

- (1) 旗多様体(A型)の Gelfand-Cetlin 系が旗多様体のトーリック退化の下で、トーリック多様体の標準的な完全可積分系(トラス作用の運動量写像)に変形できることを証明した。さらにミラー対称性への応用として、旗多様体のミラー対(スーパーポテンシャルと呼ばれる関数)が正則円盤を数え上げることにより得られることを示した(西納氏、植田氏との共同研究)。
- (2) 直交群(B型、D型)の旗多様体の場合にも Gelfand-Cetlin 系がトーリック退化を持つことを証明した。
- (3) 3次元ユークリッド空間内の多角形のモジュライ空間には対角線の長さを測る関数(bending Hamiltonian という)により完全可積分系の構造が入る。この可積分系のトーリック退化を構成した。多角形

のモジュライ空間は射影直線の点の配置空間や、射影直線上の放物的ベクトル束のモジュライ空間などとも関係のある空間である。

- (4) 射影直線上のランク 2 の放物的ベクトル束のモジュライ空間上には Goldman 系と呼ばれる完全可積分系がある(適当なホロノミーを考えることにより得られる)。また、このモジュライ空間は適当な状況の下で多角形のモジュライと同型になることも知られている。この同一視の下で Goldman 系と bending Hamiltonian が対応していることを証明した。特に Goldman 系もトーリック退化を持つことがわかる。
- (2)、(3)、(4)の退化に現れるトーリック多様体は(1)の場合に比べて悪い特異点を持つため、ミラー対称性への応用のためにはさらに議論が必要である。それは今後の課題である。

3. 現在までの達成度

- ③やや遅れている
(理由) 研究を進める中で、多角形のモジュライなどその他の理論と旗多様体の Gelfand-Cetlin 系との関係に気づき、これらを理解することも重要であることが分かってきたため、先にこれらについて調べた。そのため当初計画していた対象に関する研究は遅れているが、そのかわりに計画にはなかった結果が得られている。特にミラー対称性への応用は当初の計画以上に重要な結果だと思われる。

4. 今後の研究の推進方策

旗多様体の Gelfand-Cetlin 系の研究と平行して、多角形や放物的ベクトル束のモジュライとその上の完全可積分系のトーリック退化について引き続き調べる。現時点ではこれらの退化は旗多様体の退化を通して間接的に得られているため、その退化の様子が見やすいわけではない。そこでトーリック退化を直接構成して退化の様子を詳しく調べることを目標とする。これができればより一般の場合(射影直線を一般のリーマン面する、またはベクトル束のランクを上げる)に完全可積分系とそのトーリック退化に構成ができるようになることを期待できる。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

1. T. Nishinou, Y. Nohara and K. Ueda, Toric degenerations of Gelfand-Cetlin systems and potential functions, in Advances in mathematics, 査読有, 掲載決定
2. Y. Nohara, Projective embeddings and Lagrangian fibrations of Kummer varieties, Internat. J. Math. 20 (2009), 557-572, 査読有

[学会発表] (計 17 件)

1. 野原雄一, 旗多様体のトーリック退化と Gelfand-Cetlin 系, 2009 日本数学会秋季総合分科会 (特別講演), 2009 年 9 月 25 日, 大阪大学
2. Y. Nohara, Toric degenerations of Gelfand-Cetlin systems and potential functions, Third International Conference on Geometry and Quantization, 2009 年 9 月 23 日, University of Luxembourg
3. Y. Nohara, Toric degenerations of Gelfand-Cetlin systems and potential functions, East Asian Symplectic Conference 2009, 2009 年 5 月 10 日, Academia Sinica, 台北