様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　４月２６日現在

研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：2007～2009
課題番号：19740029
研究課題名（和文）複素多様体の境界に現れるオープンブック分解と接触構造に関する研究

研究課題名（英文）Research on open book decompositions appearing on the boundary of complex domains with contact structures

研究代表者
石川　昌治（ISHIKAWA MASAHARU）
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：10361784

研究成果の概要（和文）：

複素２次元ベクトル空間内で､原点からの距離が１である点の集合は３次元球面となる。この３次元球面 S 上の点 x における接平面 H を複素構造 J を使って回転させたものを JH とすると、H と JH の共通部分は S の接平面内の２次元平面となる。点 x を S 上で動かして得られるこのような平面の集まり（つまり平面場）を３次元球面の標準的接触構造という。本研究ではこの接触構造が低次元トポロジーにおける quasipositive 曲面という特別な曲面により特徴付けられることを示し、またその具体例として実解析的特異点の特別なクラスについて考察した。

研究成果の概要（英文）：

Let S be the unit sphere in the 2-dimensional complex vector space. For each point x in S, let H be the tangent space of S at x. We then rotate H by multiplying the complex symbol J and obtain another plane JH. The intersection of H and JH is a 2-plane in the tangent space H. The collection of such an H for all x in S is called the standard contact structure in S. In this project, we gave a characterization of this contact structure using surfaces in S with boundary, called quasipositive surfaces. We also observed a class of real analytic singularities as an example of this characterization.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	1,300,000	0	1,300,000
２００８年度	900,000	270,000	1,170,000
２００９年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	3,100,000	540,000	3,640,000

研究分野：特異点のトポロジー
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：特異点論、接触構造、３次元多様体論、結び目理論

１．研究開始当初の背景

３次元多様体のオープンブック分解と両立する接触構造という概念は W.Thurston 氏と H.Winkelnkemper 氏により導入され[1]、2000 年頃の E.Giroux 氏の研究[2]により注目されるようになった。オープンブック分解のうち複素領域の境界として現れるもの、例えばミルナー束などは、tight と呼ばれる剛性をもつ接触構造と両立することが知られている。

一方、複素平面曲線の位相的研究の過程で L.Rudolph 氏により quasipositive 曲面という概念が導入された[3]。Quasipositive 曲面は３次元球面内の境界付き曲面の特殊なクラスで、その後、接触多様体の研究などでたびたび現れるようになる。Quasipositive 曲面あるいは接触構造の研究は結び目理論でも行われていたが、ルジャンドル曲線やプラミングあるいは村杉和を使った研究が主で（例えば[4]を参照）、接触構造による quasipositive 曲面の一般的な特徴付けなどは行われていなかった。

２．研究の目的

本研究の目的は、奇数次元多様体のオープンブック分解と、その多様体を境界とする複素多様体から定まる接触構造との関係を調べることである。その最初の重要なステップとして、３次元多様体のオープンブック分解と接触構造の関係について研究し、低次元トポロジーの立場から tight 性の特徴付けを行う。３次元多様体についての具体的な研究は高次元のオープンブック分解と接触構造の関係を理解するためのモデルになるので、一般次元の問題を考える上でも重要なステップとなる。

３．研究の方法

３次元球面内の向き付け可能な境界付き曲面のことをザイフェルト曲面といい、特に n 枚の平行な円板に正方向に半捻りしたバンドを貼りつけて得られるザイフェルト曲面のことを quasipositive 曲面という。研究の最初のステップとして、３次元球面内の tight な接触構造と両立するファイバー曲面は quasipositive であることを示す。これにより、tight という概念をファイバー曲面の形という低次元トポロジー的な情報により置き換えることができる。

次に、f¥bar g-型の実解析的写像のミルナー束について、そのオープンブック分解がどのような接触構造と両立するかについて考える。ここで f と g は複素２変数の多項式である。この実解析的写像はほとんどの場合、原点に孤立特異点を持ち、ミルナー束が定義されることが知られている[5,6]。両立する接触構造を一般に決定することが難しい場合は、多項式 f と g を具体的に与えてこの問題を考える。

また、結び目補空間の基本群の SL(2,C)表現の研究を進め、オープンブック分解および接触構造との関係を模索する。

４．研究成果

(1) Quasipositive 曲面の接触構造による特徴付け

３次元球面内のファイバー曲面について、それが tight な接触構造と両立することと、その曲面が quasipositive であることが必要十分であることを示した（論文 1）。３次元球面の接触構造の接触同相による分類は Y.Eliashberg 氏により知られている[7,8]。そのうち tight なものはただ１つで、これを標準的接触構造とよぶ。Tight でない接触構造は overtwisted と呼ばれ、そのような接触構造は２次元平面場のホモトピー類に対応して整数個存在することが知られている。Tight な接触構造は２次元平面場のホモトピーよりも拘束力が強く、これを tight な接触構造の剛性と呼んだりする。

一方、quasipositive 曲面は L.Rudolph 氏による平面曲線のトポロジーの研究により導入された概念であり、

① quasipositive 曲面は正のトーラスリンクのファイバー曲面の部分曲面として得られる[9]
② quasipositive 曲面のすべての本質的部分曲面は quasipositive 曲面である[9]
③ 曲面Fが２つの曲面 Gと Hの村杉和で得られるとき、F が quasipositive 曲面であることと、２つの曲面 G と H が共に quasipositive 曲面であることが必要十分である[10]

など、quasipositive 曲面の剛性の暗に示す結果がいくつも知られている。

今回の結果は２つの剛性を理論的に結び付けるものである。Quasipositive 曲面の立場で見ると、quasipositive 曲面が持つ良い性質は接触構造の tight 性によるものと理解できる。また逆に、オープンブック分解と両立する接触構造の tight 性の判定は一般に難しい課題であるが、ファイバー曲面が quasipositive であることが確認できれば tight 性が従うことから、tight 性の視覚的十分条件を与えていることになる。

同じ結果は M.Hedden 氏の論文[11]でも証明されているが、ホップバンドのプラミングに関する Giroux の結果[2]を使わないという点で、今回の結果の証明の方が優れている

と言える。
オープンブック分解が与えられたとき、それと両立する接触構造が tight であるかを判定する方法を見つけることが今後の課題となる。

(2) f¥bar g-型の特異点のミルナー束と両立する接触構造の研究

f と g がブリースコーン型の多項式のとき、写像 f¥bar g の原点における特異点のミルナー束が overtwisted な接触構造と両立することを示した (論文 2)。通常の複素多項式 f のみの写像が作る特異点の場合、ミルナー束のモノドロミーは正デーン捻りの積で表されるため、両立する接触構造は tight であることが知られている。よって今回の結果は、接触構造が、複素多項式の特異点と実解析的特異点を区別している例と捉えることができる。
もともと f¥bar g-型の特異点は J.Seade 氏 や A.Pichon 氏により研究されていて [4,5]、実解析的特異点の中でも複素多項式の性質が使い易い良いクラスとして知られている。A.Pichon 氏はこの型の特異点とザイフェルト構造との関係や、特異点解消グラフあるいは splice diagram との関係を詳しく研究しており、今回の研究はそれらと接触構造の研究を結びつけるためのモデルになっている。
今後の課題としては、一般の f¥bar g-型の実解析的特異点に対して、両立する接触構造が overtwisted であることを証明することが挙げられる。また、同じ型の高次の実解析的特異点に話を進め、高次元における overtwisted disk の概念を導出することも重要な課題の１つである。

(3) タングル数３のプレッツェル結び目の finite surgery の決定

タングル数３のプレッツェル結び目に沿ったデーン手術により基本群が有限群である３次元多様体が得られるとき、それは (-2,3,7)-プレッツェル結び目の 17-、18- あるいは 19-手術か、あるいは(-2,3,9)-プレッツェル結び目の 22- あるいは 23-手術であることを示した (論文 3)。これはタングル数３のプレッツェル結び目の finite surgery を完全に決定する結果である。
同じ頃に市原一裕氏、In Dae Jong 氏により同様の主張が証明された[12]。彼らはさらに、他のモンテシノス結び目からは基本群が有限群である３次元多様体は得られないことを示し、モンテシノス結び目に対する finite surgery を完全に決定した。彼らの証明が代数的なのに対し、今回のタングル数３のプレッツェル結び目に対する証明は双曲幾何における 6-theorem、ideal point による Culler-Shalen ノルムの計算など、幾何的な要素を多く含んでいる。Finite surgery を幾何的に理解する上で重要な証明といえる。
本研究の目的に沿った今後の課題として、タングル数３のプレッツェル結び目でファイバー性をもつものに注目し、接触構造との関係を調べていきたい。

[1] W.Thurston, H.Winkelnkemper, On the existence of contact forms, Proc. Amer. Math. Soc. 52 (1975), 345-347.
[2] E.Giroux, Geometrie de contact: de la dimension trois vers dimensions superieures, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol II (Beijing, 2002), pp.405-414, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.
[3] L.Rudolph, Algebraic functions and closed braids, Topology 22 (1983), 191-202.
[4] I.Torisu, Convex contact structures and fibered links in 3-manifolds, Int. Math. Res. Not. 9 (2000), 441-454.
[5] A.Pichon, Real analytic germs f¥bar g and open-book decompositions of the 3-sphere, International J. Math. 16 (2005), 1-12.
[6] A.Pichon, J.Seade, Fibered multi-links and real singularities f¥bar g, Math. Ann. 324 (2008), 487-514.
[7] Y.Eliashberg, Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work, Ann. Inst. Fourier 42 (1992), 165-192.
[8] Y.Eliashberg, Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds, Invent. Math. 98 (1989), 623-637.
[9] L.Rudolph, A characterization of quasipositive Seifert surfaces (Constructions of quasipositive knots and links, III), Topology 31 (1992), 231-237.
[10] L.Rudolph, Quasipositive plumbing (Constructions of quasipositive knots and links, V), Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), 257-267.
[11] M.Hedden, Notions of positivity and the Ozsvath-Szabo concordance invariant, preprint, available at arXiv:math/0509499
[12] K.Ichihara, I.D.Jong, Cyclic and finite surgeries on Montesinos knots, Algeraic & Geometric Topology, 9 (2009), 731-742.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）
1. Sebastian Baader、石川昌治、Legendrian graphs and quasipositive diagrams、Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse、査読有、XVIII巻、2009 年、285-305
2. 石川昌治、On the contact structure of a class of real analytic germs of the form f¥bar g 、Singularities — Niigata-Toyama 2007、Advanced Studies in Pure Mathematics、査読有、56 巻、2009 年、201-223
3. David Futer、石川昌治、蒲谷祐一、Thomas Mattman、下川航也、Finite surgeries on three-tangle pretzel knots、Algebraic & Geometric Topology、査読有、9 巻、2009 年、743-771

〔学会発表〕（計 7 件）
1. 石川昌治、On real analytic germs and contact structures、第４回日仏特異点シンポジウム、2007 年 8 月 29 日、富山
2. 石川昌治、実解析的特異点と接触構造について、研究集会「接触構造と葉層構造」、2007 年 9 月 5 日、東京大学玉原国際セミナーハウス
3. 石川昌治、Contact structures of Seifert links and their cablings、研究集会「Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics」、2009 年 3 月 10 日、広島大学
4. 石川昌治、Contact structures compatible with fibered Seifert links、研究集会「Symplectic topology, contact topology and applications 2009」、2009 年 3 月 23 日、北海道大学
5. 石川昌治、f¥bar g-型の特異点のミルナー束と両立する接触構造について、研究集会「トポロジーと写像の特異点」、2009 年 6 月 4 日、信州大学
6. 石川昌治、The standard contact structure and quasipositive surface in S^3、Mini-Workshop on Differential Geometry and Topology、2009 年 10 月 3 日、東北大学
7. 石川昌治、向きを入れ替えたトーラスリンクの quasipositivity について、研究集会「東北結び目セミナー」、2009 年 10 月 19 日、山形

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

６．研究組織
(1)研究代表者
石川　昌治（ISHIKAWA MASAHARU）
東北大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：10361784

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：