

平成 22 年 5 月 10 日現在

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2007 ～ 2009

課題番号：19740034

研究課題名（和文） ミラー対称性と多様体の退化に関わる幾何の研究

研究課題名（英文） Geometry related to mirror symmetry and degenerations of manifolds

研究代表者

西納 武男 (NISHINOU TAKEO)

東北大学・大学院理学研究科・助教

研究者番号：50420394

研究成果の概要（和文）：

多様体と呼ばれる、一般に複雑な幾何的な対象に、巧妙に隠された対称性や構造を解き明かすのが研究の目的である。そのために主に2つの方法を用いて研究した。一つは多様体の退化という、複雑な幾何的な対象をより簡単なものに分解して調べる手法で、もう一つはミラー対称性という、図形のある種の双対変換である。その結果多様体にいくつかの不変量を定義し、計算することが出来た。

研究成果の概要（英文）：

The purpose of our study is, to reveal symmetries and structures which are ingeniously hidden in seemingly complicated geometric objects. We mainly developed two devises: One is the degeneration of manifolds, which decomposes complex objects into simpler parts, and the other is the mirror symmetry, which is a kind of duality transformation between geometric objects. As a result, we could define several invariants of manifolds, and calculate them.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	900,000	0	900,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,300,000	420,000	2,720,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：正則曲線、ミラー対称性、複素多様体

## 1. 研究開始当初の背景

ミラー対称性は数学と物理の様々な側面か

ら研究されており、当初カラビ・ヤウ多様体と呼ばれる3次元複素多様体に対して定式化されていたミラー対称性予想(Greene,

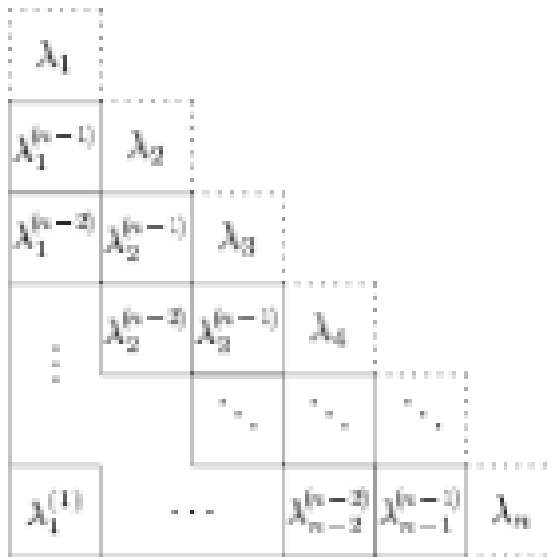
B.R. ; Plesser, M.R. Duality in Calabi-Yau moduli space. Nuclear Phys. B 338 (1990), no. 1, 15–37)は、ホモロジー的ミラー対称性と呼ばれる圏論的な枠組み(Kontsevich, Maxim Homological algebra of mirror symmetry. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), 120–139)、またはホッジ理論的ミラー対称性(Candelas, P. ; de la Ossa, X.C. ; Green, P.S. ; Parkes, L. A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory. Essays on mirror manifolds, 31–95, Int. Press, Hong Kong, 1992.)などのより詳細な定式化がなされた。一方、扱う対象もファノ多様体などのカラビ・ヤウ以外の多様体(Kentaro Hori, Cumrun Vafa, Mirror symmetry, arXiv:hep-th/0002222; Kentaro Hori, Amer Iqbal, Cumrun Vafa, D-branes and mirror symmetry, arXiv:hep-th/0005247)、または特異点なども含むように(Orlov, D. O. Triangulated categories of singularities and D-branes in Landau-Ginzburg models. (Russian) Tr. Mat. Inst. Steklova 246 (2004), Algebr. Geom. Metody, Svyazi i Prilozh., 240–262)拡張して行った。これらのミラー対称性は、物理における超対称共形場の理論の、特別な極限において数学的に厳密になると考えられているが、数学的にはそれは多様体がある種の退化を起こすこととして理解できる(Gross, Mark; Wilson, P. M. H. Large complex structure limits of  $K3$  surfaces. J. Differential Geom. 55 (2000), no. 3, 475–546.)。そうした多様体の退化を記述する数学として、G.Mikhalkinによりトロピカル幾何学と呼ばれる分野が創始された。ミラー対称性、あるいは一般に量子論的な幾何学の研究では正則曲線の数え上げの問題が常に重要な役割を果たすが、トロピカル幾何学はこの問題に非常に有効であることが明らかにされつつあった。特に、G. Mikhalkin, Enumerative tropical algebraic geometry in  $\mathbb{R}^2$ . J. Amer. Math. Soc. 18 (2005), no. 2, 313–377, および Takeo Nishinou and Bernd Siebert, Toric degenerations of toric varieties and tropical curves, Duke Math. J. 135 (2006), no. 1, 1–51 において、トーリック多様体における正則曲線の数え上げと、トロピカル曲線の正確な関係が明らかにされた。そこで、トロピカル幾何学をはじめとする多様体の退化の考え方をを用いて、ミラー対称性を研究しようというのは、非常に自然な考え方となっていた。

## 2. 研究の目的

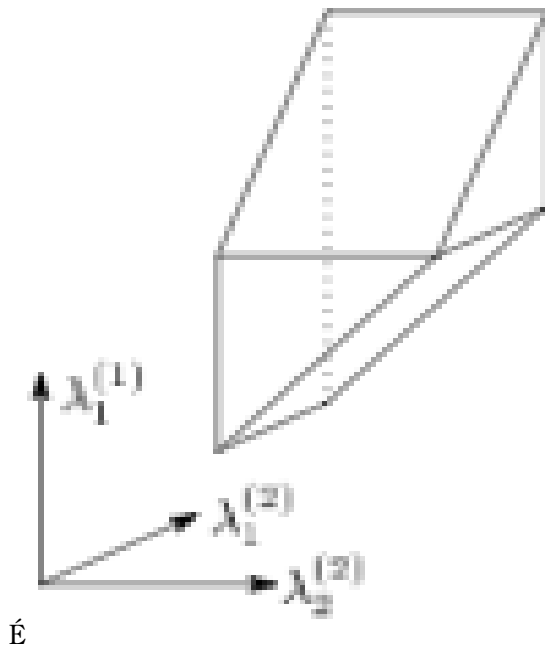
多様体の退化の考え方をを用いて、ミラー対称性の研究で現れる幾何学的対象の諸性質や、多様体上の可積分系の構造を調べることを目的とした。退化の考え方をを用いることによって、直接形研究することが難しい幾何学的対象を扱うことが可能になることがあり、またそれによりもたらされた理解から、新しい幾何学的対象が創成されることもある。このことを踏まえて、ミラー対称性及び可積分系の構造に関して、より深い理解を得ると同時に、従来と異なる立場から新しい知見をもたらす研究を行いたいと考えた。より具体的には、トロピカル幾何学を用いたグロモフ-ウィッテン不変量の研究、トロピカル幾何学を用いたフレアー-ホモロジーの研究、また、ファノ多様体のトーリック退化とこれらの研究を組み合わせて、ファノ多様体のフレアー-ホモロジーの研究を行うことが挙げられる。また、トロピカル幾何学はトロピカル曲線だけでなく、高次元のトロピカル多様体も考えることが出来、多様体の退化を有効に記述する。従って、トロピカル幾何学の研究自身を進めることも重要な問題であり、それを考えることも目的とした。

## 3. 研究の方法

多様体の退化の理論は、特に退化した先がトーリック多様体またはそれらの集まりであるときに有効であることが理解されている。一般にトーリック退化における中心ファイバーは複数個の既約成分を持つが、旗多様体のようなファノ多様体のトーリック退化の場合、Gonciulea, N. ; Lakshminbhai, V. Degenerations of flag and Schubert varieties to toric varieties. Transform. Groups 1 (1996), no. 3, 215–248, Kogan, Mikhail; Miller, Ezra Toric degeneration of Schubert varieties and Gelfand-Tsetlin polytopes. Adv. Math. 193 (2005), no. 1, 1–17, および Alexeev, Valery; Brion, Michel Toric degenerations of spherical varieties. Selecta Math. (N. S.) 10 (2004), no. 4, 453–478. で示されているように、既約成分が一つになる場合がある。特に旗多様体の退化の場合には様子がよくわかっていて、退化したトーリック多様体の momentum polytope は、ゲルファント-ツェトリン多面体と呼ばれる、図のような  $n(n+1)/2$  個の数の不等式で表される、 $n(n-1)/2$  次元の凸多面体になる。ここで  $\lambda_i$  は固定した数であり、下の図において上または右に行くほど大きい数である、という不等式を満たす。これは元々 Gelfand-Cetlin の原論文 Gel'fand, I. M. ; Cetlin, M. L. Finite-dimensional



representations of the group of unimodular matrices. (Russian) Doklady Akad. Nauk SSSR (N. S.) 71, (1950). 825--828.において、表現論的な考察から現れる自然な対象である。この事情により、退化して得られるトーリック多様体を、ゲルファント-ツェトリントーリック多様体という。これは一般に非特異にならず、例えば3次元空間の full flag をパラメトライズする旗多様体の場合、ゲルファント-ツェトリン多面体は図のようになり、辺が4本集まっている頂点に対応するトーリック多様体のトラス不動点は特異点になっている。



一方、旗多様体には自然な可積分系の構造 (ゲルファント-ツェトリン系) があり (Guillemin, V.; Sternberg, S. The Gel'fand-Cetlin system and quantization of the complex flag manifolds. J. Funct. Anal. 52 (1983), no. 1, 106-128) 旗多様体のフレアーコホモロジーの視点における研究では、そのトラスファイバーのフレアーコホモロジーを求めることは基本的な問題である。しかしそれを直接計算することは困難である。一方、トーリック多様体にはトラス作用によって自然な可積分系の構造が入っている。トーリック多様体为非特異かつファノの場合、Cho, Cheol-Hyun; Oh, Yong-Geun Floer cohomology and disc instantons of Lagrangian torus fibers in Fano toric manifolds. Asian J. Math. 10 (2006), no. 4, 773--814. によって、トラスファイバーのフレアーコホモロジーが計算された。旗多様体は既約なトーリック多様体に退化するので、トーリック多様体の結果を用いて旗多様体の場合のフレアーコホモロジーが計算できることが期待される。しかし、問題点が大きく言って2つあり、一つは、退化したトーリック多様体为非特異でないこと、もう一つは旗多様体を退化させたときに、ゲルファント-ツェトリン系とトーリック多様体の可積分系と言う2つの可積分系の構造が自然に同一視できるのか、ということである。そこで、まずは可積分系の退化の概念を定義し、その理論を整備することから出発した。すなわち、 $X$  を射影多様体、 $w$  をその上のケーラー形式、 $f: X \rightarrow \mathbb{R}^N$  を完全可積分系の構造とする。このとき、 $f$  のトーリック退化とは、複素多様体  $B$  上の射影多様体の平坦族  $Y$ 、 $Y$  上のケーラー形式  $v$ 、 $B$  上の区分線形な道  $g$  で、 $g(1)$  上のファイバーは  $(X, w)$  に同型、 $g(0)$  上のファイバー  $(X_0, w_0)$  はトラス不変なケーラー形式を備えたトーリック多様体で、 $g$  に沿った gradient-Hamiltonian flow (Ruan, Wei-Dong Lagrangian torus fibration of quintic Calabi-Yau hypersurfaces. II. Technical results on gradient flow construction. J. Symplectic Geom. 1 (2002), no. 3, 435--521.) によって可積分系の構造が保たれるようなもののことを言う。この定義を出発点として、旗多様体とトーリック多様体の比較が可能になり、それを用いて旗多様体のフレアーコホモロジー的不変量を計算する、というのが研究の方向である。

#### 4. 研究成果

まずは、上に定義した可積分系の退化の概念に、旗多様体が適することを示した。すなわち、 $(X, w)$ を旗多様体、 $f: X \rightarrow \mathbb{R}^N$ をゲルファント-ツェトリン系、 $(X_0, w_0)$ をゲルファント-ツェトリントリック多様体とする時、複素多様体  $B$  上の射影多様体の族  $Y$  で、可積分系としての退化を与えるようなものがある。

この結果を出発点として旗多様体のスーパーポテンシャルと呼ばれる、ゲルファント-ツェトリン多面体の内点上で定義された関数を求めることが出来る。このスーパーポテンシャルは、可積分系のトーラスファイバーを境界条件とする、マスロフ指数 2 のディスクを数え上げることでなされるが、非特異なファノ多様体の場合は、上述の Cho-Oh による結果がある。すなわち、トリック多様体上のディスクを Blaschke product と呼ばれる有理関数の積の形で具体的に書くことが出来る。ゲルファント-ツェトリン多面体は、拡張された意味でファノ多様体ではあるが、問題は特異点を持つことである。しかし、A 型の旗多様体の場合は、このような特異点は small と呼ばれるクラスであることを、ゲルファント-ツェトリン多面体の形から直接示すことが出来る。これは Batyrev, Victor V.; Ciocan-Fontanine, Ionuț; Kim, Bumsig; van Straten, Duco Mirror symmetry and toric degenerations of partial flag manifolds. Acta Math. 184 (2000), no. 1, 1--39. における計算を簡略化かつ一般化するものである。更に、特異点が small である場合は、ホモトピー的な議論によって、ディスクの数え上げに関しては多様体が非特異である場合と同じように計算できることを示した。これによって、Cho-Oh の結果を適用でき、旗多様体のスーパーポテンシャルを、ゲルファント-ツェトリン多面体の情報だけから求めることが出来た。

スーパーポテンシャルはラグランジアン部分多様体に関する情報を多く持っているので、これによって旗多様体のゲルファント-ツェトリン系のラグランジアントーラスファイバーに関する、シンプレクティック幾何的な結果を引き出すことが出来る。一例として、深谷-Oh-太田-小野 (Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds I. arXiv:0802.1703.) の結果とあわせて、次の結果が示せた。

定理：ゲルファント-ツェトリン系のラグランジアントーラスファイバーの中に、少なくとも一つフレーアーコホモロジーが自明でないものが存在する。特に、少なくとも一つ Hamiltonian indisplaceable であるものが存

在する。

ここでラグランジアン部分多様体  $L$  が Hamiltonian indisplaceable とは、 $f$  を任意の Hamilton 微分同相写像とする時、 $L$  と  $f(L)$  の交わりが空となることである。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

1. 西納武男、野原雄一、植田一石、Toric degenerations of Gelfand-Cetlin systems and potential functions、Advances in Mathematics 224 (2010), pp. 648-706、査読あり
2. 西納武男、Convergence of adiabatic family of anti-self-dual connections on products of Riemann surfaces、Journal of Mathematical Physics 51(2010)、022306、査読あり
3. 西納武男、トロピカルカーブの幾何について、数理解析研究所講究録 1650 (2009), 34-40、査読なし
4. 西納武男、Global gauge fixing for connections with small curvature on  $T^2$ 、Internat. J. Math. 18(2007), 165-177、査読あり

[学会発表] (計 0 件)

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

#### 6. 研究組織

(1) 研究代表者

西納 武男 (NISHINOU TAKEO)

東北大学・大学院理学研究科・助教

研究者番号：50420394