

研究種目：若手研究 (B)
研究期間：2007～2009
課題番号：19740036
研究課題名 (和文) ベクトル束とそのモデュライに関する研究
研究課題名 (英文) Study on vector bundles and moduli spaces
研究代表者
望月 拓郎 (MOCHIZUKI TAKURO)
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号：10315971

研究成果の概要 (和文)：

ワイルド調和バンドルの研究を通じて代数的なD加群の理解を深めました。すなわち、ワイルド調和バンドル・半単純ホロノミックD加群・ワイルド純ツイスターD加群の対応を確立し、その応用として代数的ホロノミックD加群の半単純性がある種の操作で保たれることを示しました。この過程で有理型平坦束の基礎理論に大きな進展がもたらされました。すなわち、ある種の特異点解消定理が証明され、さらに有理型平坦束がストークスフィルトレーションによって記述されることが示されました。

研究成果の概要 (英文)：

We studied wild harmonic bundles and algebraic holonomic D-modules. We established the correspondence between semisimple algebraic holonomic D-modules and polarizable wild pure twistor D-modules through wild harmonic bundles. As an application, we showed that semisimplicity of algebraic holonomic D-modules is preserved by push-forward. In the course of the study, we obtained fundamental theorems for algebraic meromorphic flat bundles, namely, a resolution of turning points, and a description of irregular singularity in terms of a system of Stokes filtrations.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	600,000	0	600,000
2008年度	600,000	180,000	780,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,700,000	330,000	2,030,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：ストークス構造 ワイルド純ツイスターD加群 ワイルド調和バンドル
不確定特異点 強レフシェッツ定理

1. 研究開始当初の背景

Simpson による射影多様体上の調和バンドルに関する巨大な研究を受けて、私は準射影多

様体上の調和バンドルについて研究を進めていました。そして、従順調和バンドル、安定パラボリックヒッグス束、安定パラボリック平坦束の間の Kobayashi-Hitchin 対応を確立していました。これを用いて代数多様体のトポロジーに関して非自明な結果が得られていました。また、無限遠における挙動がホッジ構造の変動の挙動と似たものになることを示しました。これらの結果を Sabbah による偏極付純ツイスター D 加群の理論に適用して、代数的正則ホロノミック D 加群の半単純性がある種の操作で保たれるという Kashiwara の予想を解決していました。このように確定型特異点（従順）の場合には大きな成功を収めていました。

その一方で、不確定型特異点（ワイルド）の場合、特に高次元ではほとんど何もわかっていませんでした。それは単にワイルド調和バンドルについて何も知られていなかっただけでなく、基礎となるべき高次元代数多様体上の有理型平坦束についての一般論自体が、Majima や Sabbah による先駆的な仕事があったものの、十分には展開されていなかったという事情がありました。

曲線上の有理型平坦束に関しては非常にきれいに確立された一般論がありました。極で完備化したものは簡単な形をしていることを保証する Hukuhara-Levelt-Turrittin の定理と、そのきれいな形がセクター上にまで持ち上がることを保証する漸近解析の二つによって、曲線上の有理型平坦束は理解されます。

これを高次元の場合に拡張することは自然な問題です。Majima はその先駆的な仕事で、きれいな形をセクター上に持ち上げるという二番目の部分を研究しました。また Sabbah は Majima の仕事をより洗練されたものにすると同時に、一番目の問題の重要性を認識し、ある種の特異点解消（変わり目点の解消）に対応する予想を提出していました。すなわち、適当なブローアップをとると、有理型平坦束がきれいな形をしたものになることを予想しました。そして、部分的な結果を得てはいましたが、一般的に使えるまでにはいたっていませんでした。

このような変わり目点の解消は調和バンドルの研究をするうえで非常に重要でした。従順調和バンドルの結果を確定特異点を持つ有理型平坦束の理論に適用する上でキーになったのは、有理型平坦束の半単純性を良い多重調和計量の存在によって特徴付ける定理でした。これを不確定型の場合に拡張して、半単純有理型平坦束上に良い多重調和計

量を構成するには、有理型平坦束の局所的な形に関してある程度の情報が必要となります。そのために、まさに変わり目点の解消が必要でした。

2. 研究の目的

代数多様体上の調和バンドルの性質を調べることで、代数的な平坦束や D 加群の大域的・局所的な性質の理解を深めることが目的でした。半単純正則ホロノミック D 加群に関する Kashiwara の予想を解決することを大きな目標とし、そのために従順の場合に成り立つことを非従順の場合に拡張することをより具体的な目標としました。調和バンドルの理論を適用するために基礎となる代数的有理型平坦束の一般論の準備も行うことになりました。

3. 研究の方法

(1) 変わり目点の解消について、平坦束の代わりにヒッグス束の場合にも同様の問題を定式化できますが、これは比較的容易に解決できることに着目しました。したがって、ワイルド調和バンドルと有理型平坦束の関係が確立されていれば、有理型平坦束の変わり目点の解消もできることとなります。そして、ワイルド調和バンドルと有理型平坦束の対応は、2次元の場合にできれば3次元以上に拡張するのは比較的容易です。これで問題を2次元の場合に帰着できます。2次元の場合には別のアイデアが必要になります。正標数の世界にいくと p-曲率というヒッグス場に似たものが得られるので、p 曲率の変わり目点の解消を各素数 p について一様にできれば良いということになります。このアイデアを追究しました。

(2) 不確定型特異点のストークスフィルトレーションによる記述することを組織的に研究しました。このような観点は、今では標準的なものになっていますが、私が研究を始めた段階ではあまり知られていませんでした。この記述は不確定値を変動させることによって得られる変形を記述するのに適しており、ワイルド調和バンドルの研究と親和性が高いものです。特にストークスフィルトレーションに関する Gr をとることで、ワイルド調和バンドルの漸近挙動に関する研究が従順調和バンドルの漸近挙動の研究に帰着されることとなります。

(3) 従順調和バンドルに関する研究結果をワイルドの場合に拡張することを一般的な方針としました。従順の場合に確立した手法のかなりの部分はワイルドの場合にも使えましたし、期待される結果についてある程度

の見当がつくことは研究を進める上で有益でした。

(4) Sabbah のプログラムを進展させました。すなわち、ワイルド純ツイスターD加群の一般論をさらに発展させ、特に強レフシェッツ定理を証明し、さらに純ツイスターD加群と代数的半単純ホロノミックD加群との対応を確立することで、半単純ホロノミックD加群に関する Kashiwara の予想を解決を目指すという方針を追究しました。

4. 研究成果

ワイルド調和バンドル、純ツイスターD加群、及び有理型平坦束の理論に関して、非常に大きな進展を遂げました。研究を始める前とは様相が一変したといっても良いと思います。

(1) 上に述べたアイデアを追究した結果、代数的有理型平坦束の変わり目点の解消定理が得られました。これは今後の代数的有理型平坦束の研究で最も基本的となる研究結果の一つといえると思われます。2次元の場合は論文(3)として既に出版しました。高次元の場合はプレプリント arXiv:0803.1344 として発表してあります。また部分的なサーベイは論文(2)として発表される予定です。

この結果は有理型平坦束やホロノミックD加群の研究に大きなインパクトを与えたと思います。その後、Kedlaya の素晴らしい仕事によって別の方法で一般化されましたが、私の結果もブレイクスルーになったといえると考えています。

(2) ストークス構造と有理型平坦束との対応を示すことで、有理型平坦束の漸近解析の理論を完成させました。この結果もプレプリント arXiv:0803.1344 に書いてあります。

(3) 従順調和バンドルの漸近解析を完成させました。特にワイルド調和バンドルがきれいに延長されることを確立し、ストークス構造に関する Gr をとるとより簡単な調和バンドルが得られることを確立しました。この結果も arXiv:0803.1344 に書いてあります。また、この結果を TERP 構造の変動の場合に拡張しました。TERP とは非可換代数幾何学でホッジ構造の役割を果たすと期待されているものです。これはプレプリント arXiv:0811.1384 として発表しました。このプレプリントでは、これ以外にも、ツイスター冪零軌道と偏極付混合ツイスター構造との対応の確立や、new supersymmetric index の評価、混合 TERP 構造と HS-軌道の対応などについても研究しています。

(4) 変わり目点の解消定理と、従順調和バンドルに対して開発した手法を用いて、有理型平坦束の半単純性を良い多重調和計量の存在で特徴付けました。(この手法は論文(4)で与えられたものです。) また、上の(3)で確立した漸近挙動についての結果を用いてワイルド純ツイスターD加群とワイルド調和バンドルの対応を確立しました。また、Saito と Sabbah の理論を発展させて、ワイルド純ツイスターD加群の強レフシェッツ定理を確立しました。これらを用いて代数的ホロノミックD加群の半単純性がある種の操作で保たれるという Kashiwara の予想を解決しました。これらもプレプリント arXiv:0803.1344 に書いてあります。

(5) ストークス構造に関する研究をさらに発展させるために、フーリエ変換して得られた射影曲線上の有理型平坦束のストークス構造について詳細に調べました。この結果は論文(1)として出版予定です。さらに、ホロノミックD加群のベッチ構造がどのようなものであるべきか、そしてどのような関手性を持つかについて研究しました。この結果はプレプリント arXiv:1001.2336 で発表してあります。

(6) Donaldson 型不変量についての本の最終版を書き出版しました。この本の結果は、Donaldson 不変量と Seiberg-Witten 不変量の等価性に関する Goettsche, Nakajima, Yoshioka の素晴らしい仕事で使っていただけました。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- (1) Takuro Mochizuki,
Note on the Stokes structure of Fourier transform,
Acta Mathematica Vietnamica に掲載確定 (2010) 査読有
- (2) Takuro Mochizuki,
On Deligne-Malgrange lattices, resolution of turning points and harmonic bundles,
Annales de l'Institut Fourier に掲載確定 (2010) 査読有
- (3) Takuro Mochizuki,
Good formal structure for meromorphic flat connections on smooth projective surfaces.

Algebraic analysis and around,
223--253,
Adv. Stud. Pure Math., 54, Math. Soc.
Japan, Tokyo, 2009. 査読有

- (4) Takuro Mochizuki,
Kobayashi-Hitchin correspondence for
tame harmonic bundles. II.
Geom. Topol., 13 (2009) 359--455. 査
読有

[学会発表] (計 15 件)

(1) 発表者: Takuro Mochizuki
タイトル: Betti structure of holonomic
D-modules
研究集会: Algebraic Analysis and Beyond
年月日: 3月13日 2010年
場所: 京都大学

(2) 発表者: Takuro Mochizuki
タイトル: Betti structure of holonomic
D-modules
研究集会: Conference on Algebraic
Geometry and Arithmetic,
年月日: 2月19日 2010年
場所: エッセン大学 ドイツ

(3) 発表者: 望月拓郎
タイトル: On generalization of
Hukuhara-Levelt-Turrittin theorem I, II
研究集会: 琉球大学セミナー
年月日: 10月9, 12日 2009年 (二回講演)
場所: 琉球大学理工学研究科

(4) 発表者: 望月拓郎
タイトル: ワイルド調和バンドルについて
学会: 第56回幾何学シンポジウム
年月日: 8月28日 2009年
場所: 佐賀大学理工学部

(5) 発表者: Takuro Mochizuki
タイトル: On wild harmonic bundles I, II
研究集会:
Non-abelian Hodge theory and Geometry of
Twistor structures
年月日: 7月13, 14日 2009年 (二回講演)
場所: 京都大学

(6) 発表者: Takuro Mochizuki,
タイトル: Wild harmonic bundles and wild
pure twistor D-modules,
研究集会: DIFFERENTIAL GEOMETRIC
METHODS IN ALGEBRAIC GEOMETRY
年月日: 4月7-10日, 2009年 (4回連続講演)
場所: タタ研究所 インド

(7) 発表者: Takuro Mochizuki
タイトル: Wild harmonic bundles and
wild pure twistor D-modules
研究集会: Micro-conference at
Northwestern
年月日: 3月19日 2009年
場所: ノースウェスタン大学 アメリカ

(8) 発表者: 望月拓郎
タイトル: On wild harmonic bundle and
wild pure twistor D-module
研究集会: 第4回代数・解析・幾何学セミナー
年月日: 2月18日 2009年
場 所: 鹿児島大学

(9) 発表者: Takuro Mochizuki
タイトル: Some additional structures on
wild pure twistor D-modules
研究集会: ``Conference in Honor of Z.
Mebkhout for his Sixtieth Birthday``
日時: 1月28日 2009年
場所: セビリア大学 スペイン

(10) 発表者: Takuro Mochizuki,
タイトル: Wild harmonic bundles and wild
pure twistor D-modules
学会: International Conference on Complex
Geometry
日時: 1月16日 2009年
場所: ハノイ教育大学 ベトナム

(11) 発表者: Takuro Mochizuki,
タイトル: On Deligne-Malgrange lattices
学会等名: Equations aux derivees
partielles et theorie de Galois
differentielle
年月日: 10月8日 2008年
場所: CIRM フランス

(12) 発表者: Takuro Mochizuki
タイトル: On wild harmonic bundles
研究集会:
"New developments in Algebraic Geometry,
Integrable Systems and Mirror symmetry"
年月日: 1月10日 2008年
場所: 京都大学

(13) 発表者: 望月拓郎
研究集会: 第54回幾何学シンポジウム
タイトル: 射影曲面上の半安定層のモデュ
ライから得られる不変量について
日時: 8月27日 2007年
場所: 鹿児島大学

(14) 発表者: Takuro Mochizuki
研究集会: Algebraic Analysis and Around

タイトル: Harmonic bundle and D-module
日時: 6月29日 2007年
場所: 京都大学

(15) 発表者: Takuro Mochizuki
研究集会: From tQFT to tt^* and
integrability
タイトル: On asymptotic behaviour of wild
harmonic bundles
日時: 5月25日 2007年
場所: アウグスブルグ大学 ドイツ

[図書] (計 1 件)

(1) Takuro Mochizuki
Donaldson type invariants for algebraic
surfaces.
Springer-Verlag, Berlin, 2009年
383 ページ

6. 研究組織

(1) 研究代表者

望月 拓郎 (MOCHIZUKI TAKURO)
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号: 10315971