

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2007～2010

課題番号：19740042

研究課題名（和文）逆数学のための算術のモデルの研究

研究課題名（英文） Reverse Mathematics and Models of Arithmetic

研究代表者

山崎 武 (YAMAZAKI TAKESHI)

東北大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号 30336812

研究分野：数理論理学

科研費の分科・細目：

キーワード：二階算術，逆数学，再帰理論，オメガ-モデル，ランダム

### 1. 研究計画の概要

二階算術の枠組みにおいて、どれくらいの強さの集合存在公理図式があれば証明されるのに必要十分であるかという観点から、数学の定理を分類する試みが逆数学である。本研究の目的は、逆数学の視点を意識しながら、二階算術の部分体系のモデルの性質を分析することであり、またそれを通して再帰理論（帰納的関数論）における新しい結果を得ることである。

### 2. 研究の進捗状況

研究の出発点として **collection** の保存性について調べる予定であったが、当初想定していたモデルの構成が本質的に不可能であることがわかった。そこで、次にランダム性に関するオメガ-モデルの構成に取り組むことにした。H19年度では特に、部分ランダム性について考察した。ここから新たに対角部分ランダムという概念を導入し、これまでは、部分ランダム性と共にそれに対応する形式体系を与え、既知の体系との関係を考察してきた。また、昨年になって、通常ランダムと強いランダムの間にあるような新しいランダム性の概念を見つけ出した。ただし、厳密に中間的な位置にあるかどうかは証明できていない。

H20年度からは、ランダム性の考察と同時に再び、二階算術の体系の保存性に関する研究も行った。ここでは **collection** ばかりでなく2ベキの無限ラムジーの定理の弱形についても考察し、それらが十分複雑な文に関しても保存的であることを証明した。また、これらの考察を深め、より拡張された結果や別証明を与えることもできた。H21年度では2ベ

キの無限ラムジーの定理自体にも保存性を調べるための新しいモデルも構成法について研究したが、最近になって、ほぼ意味のない結果しか得られないものであることが判明した。

現在は更に、高階の逆数学研究の土台作りと既存の組み合わせ論の逆数学的結果を利用して有界算術へ展開することも行っている。

### 3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。

(理由)

当初の目論みとは異なる結果ではあったが、**collection** の保存性についてはほぼ完成した。ランダム性については、ランダムそれ自身の研究が思うように進まず、それに対応する形式体系については特に新しい結果は得られていない。二階算術の部分体系のモデルの性質についても、これといって新しい事実は得られていないが、最初の計画には含まれていなかったものの、有界算術への応用、逆数学の新しい結果への展開があった。

### 4. 今後の研究の推進方策

最近になって見通しが出てきた、ランダム性によって特徴づけられる形式体系の研究、逆有界算術の研究を推進する。更に高階逆数学を始めとする様々な拡張された逆数学的視点に立って、これまでの研究を見直す。

### 5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕 (計 1 件)

1. M. Kumabe, T.Suzuki and T.Yamazaki.  
Does truth-table of linear norm reduce the  
one-query tautologies to a random oracle?  
Arch. Math. Logic 47 (2008), no. 2, 159-180.  
(査読有)

〔学会発表〕 (計 1 件)

1. 山崎 武

Topics on Conservation Results, Sendai  
logic and Philosophy seminar,  
2009年2月24日 (仙台, 松島)

〔その他〕

・学会以外での発表

1. T.Yamazaki How to define randomness.  
Xi'an University of Technology,  
2009年10月23日

・主催した会議

1. 証明論研究集会 2009 (福島), 2010年2月

2. Sendai Logic Spring Workshop 2008,  
(東北大学), 2008年2月