様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２４年６月１５日現在

機関番号：11301
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2007～2010
課題番号：19740042
研究課題名（和文）　逆数学のための算術のモデルの研究

研究課題名（英文）　Reverse Mathematics and Models of Arithmetic

研究代表者
山崎　武（YAMAZAKI　TAKESHI）
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：30336812

研究成果の概要（和文）：　二階算術の枠組みにおいて，どれくらいの強さの集合存在公理図式があれば証明されるのに必要十分であるかという観点から，数学の定理を分類する試みが逆数学である．本研究では逆数学に関連して主に次の３種類の結果を得た．(1) 二階算術のオメガモデルの構成法と部分体系の保存性．(2) 新しいランダム性の導入と対応する形式体系．(3) Tutte の定理などの離散数学と，特に加群に関する可換環論の逆数学的結果．

研究成果の概要（英文）：
Reverse mathematics is the research program to classify mathematical theorems according to which set existence axioms are needed to prove them. In this point of view, we got the following three kinds of results: (1) a new method to construct omega-model and its application to conservativity result; (2) new notions of randomness and new systems corresponding to them; (3) new reverse mathematical results on Discrete Mathematics and Ring Theory.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	500,000	0	500,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総　計	2,800,000	690,000	3,490,000

研究分野：数理論理学
科研費の分科・細目：数学・数学一般
キーワード：逆数学，二階算術，オメガモデル，再帰理論

１．研究開始当初の背景

1930 年代に Hilbert と Bernays が ZFC に準じる数学の形式体系として二階算術を導入して以来，その無矛盾性の証明と相俟って，様々な考察がなされてきた．70 年頃になると，Friedman により，どれくらい数学を展開できるかという観点から二階算術の公理，特に，集合存在公理の強さの研究がなされるようになった．それが逆数学である．したがって，逆数学研究はその性質上，対象とする既知の数学定理をさらに分析するために，他の多くの数学分野で導かれた結果を用いることになる．とりわけ，数学の定理と集合存在公理の対応関係をみるのに，再帰理論もしくは計算可能性理論と強い関係を持っている．つまり，ある種の集合存在公理は，数学的対象の

計算可能性の度合いに対応する．集合論を除く多くの数学領域において，本質的に可算であるものにはこのことがいっそうあてはまるといってよい．2000 年に入り，再帰的閉集合の次数研究が盛んになるとこの関係は一面でより強いものとなったといえる．したがって，再帰理論もしくは計算可能性理論の研究が逆数学において極めて有効である．

また一方で今世紀になると，数学の定理と同値なる（集合論などの公理系を含めた）論理的原理の探求という本来の哲学的な視点から，逆数学は二階算術の枠組みを超えて，高階算術，直観主義数学に基づく研究，有界算術上での有限的性質に関する研究へとその幅を広げていこうとしていた．

そこで，このような逆数学の新しい視点も考慮し，本研究は幾つかのアプローチを同時並行することで未開拓な領域も視野に入れた逆数学研究のさきがけになることをねらったものである．

２．研究の目的

二階算術の枠組みにおいて，どれくらいの強さの集合存在公理図式があれば証明されるのに必要十分であるかという観点から，数学の定理を分類する試みが逆数学である．本研究の目的を総括すると,以下の３点である．(1) 二階算術のオメガモデルの様々な構成法の探求と性質を調べる，(2) 再帰理論への応用，(3) ランダム性などの逆数学の未開拓の領域について調べる．

(1) については，RCA_0 の拡大理論の証明力の特殊な Π^1_2-文に関する保存性に関して代表者らが以前に証明した結果を拡張することが目的である．ここで保存される文は，集合の定義可能性と絡むもので，explicit な集合存在と implicit な集合存在の違いを明らかにしようとするものである．

(2) 一般に逆数学は，数理論理学の他の分野の結果を応用することで研究が進められる．このとき，適用されるものは馴染みのある数学的対象であったりするので，応用される手法や次にその分野で考察されるべきものが導かれるための試金石の役割をになっている場合が少なからずある．本研究では，これをより積極的に適用しようとした．実際に，逆数学自身は，応用元の理論よりも必要な情報が少ない．したがって，逆数学現象だけに注目すれば，さしあたってのおおまかな性質だけは調べることができる．

(3) アルゴリズム的ランダム性の研究は近年の再帰理論の大きな話題の一つである．しかし，ML ランダムの存在に対応する体系 $WWKL_0$ が知られているのみで，ランダム性に対応する部分体系は知られていなかった．

この $WWKL_0$ は，逆数学で数学の定理の分類に用いられる体系に含まれていないが，WKL_0 の部分体系でもあり，新しい分類項目として用いても自然なものといえる．一方で，ベールカテゴリー定理から導入された体系は WKL_0 と独立であり，ベキ２のラムジー定理もそのように考えられる．このように逆数学には幾つかの例外がある．同様に，ランダム性の幾つかの性質はこの例外にあてはまるものだと考えられる．本研究ではこの方向からの新しい例外を見つけることも目標とした．

３．研究の方法

まず，ランダム性についての再帰理論的研究を行い，そこから新しい公理を導入することと，それに対応する形式体系の決定すること，逆数学により幾つかの定理がその体系に分類されることを調べることにした．

これに関しては最初，劉晨光氏と研究を行い部分ランダム性から対角的ランダム性の概念を導入することができた．その後，彭寧寧氏と研究を続け，今度は ML テストの相対性や収束度による拡張によって L-ランダムを導入することにした．そして，それぞれに対応する形式体系を定め，その強さを分析した．

また，２ベキのラムジー定理や collection その他の公理の保存拡大性を調べるために，いくつかの強制法を考えた．特に，帰納法が付け足されている場合の対応も吟味し，一つの証明法ではなく，いくつかの証明のバリエーションを考えた．更にここから，対角ランダムの存在公理のための強制法を考えた．このようなモデルの構成に関する研究は代表者が単独で行った．

その中で，グラフ理論や組み合わせ論的な公理について研究する必要があると感じ，榊原拓と共にグラフ理論に関する研究をはじめた，その結果，保存性や独立性を導くような公理は得られなかったものの，一方で，直接的にいくつかの逆数学の結果を得ることができた．

その流れの中で，初年度で止めていた，佐藤隆と横山啓太との代数学に関する共同研究を単独で始め直し，主に可換環論に関する逆数学的結果をまとめて得ることができた．

更に，同時並行的に，高階算術の逆数学にも着手した．これは，類似的な命題に対して，二階算術のときよりも細かな議論が必要なくなると想定されたためである．しかし，既存の結果を一様化するような形でのものは割と容易く得られるが，本質的に３階であることを必要とするものに関しては，同値性を示す為の基礎とするべき体系を特定するまでにもいたらなかった．そこで一部の内容については井澤昇平に研究を預け，彼が独自の展開を行った．

４．研究成果

成果は大別すると次の 4 つである．(1)ランダム性に関するもの，(2) オメガモデルの構成と保存性に関するもの，(3)高階算術に関するもの，(4)逆数学の結果．

以下では，それぞれについて述べていく．

(1) ランダム性に関する結果．

対角的ランダムと L-ランダムなどを導入し，それぞれの形式体系 DCR，LRA を与え，それを他の体系と比較した．比較に関しては部分的な結果しか得られていない．

0 と 1 からなる無限列のランダム性に関しては，まず，只木孝太郎が導入した部分ランダム性について研究した．そこで劉晨光と部分的ランダム性に関する新しい概念を導入し，強 Chaitin-T-ランダム性が弱 DH-Chaitin-T-ランダム性より本質的に異なることを示した．その後，弱 Chaitin-T-ランダム列の存在に関する公理を導入し，その強さを調べた．

しかし，このような部分ランダム性の概念は，形式体系を与えるような計算可能性概念とそれほど相性がようないと考えられた．

0-1 無限列は[0,1]に属する実数の２進小数展開とみなすことができる．無限列 T が T-ランダムになる場合，対角部分ランダムであると定める．厳密には，今のところ対角部分ランダムは弱 Chaitin-T-ランダムを使って定義している．

そこで今度は，対角部分ランダムについても同じように対応する形式体系 DCR を考えることにした．

この体系は WWKL より真に弱いことがわかった．おそらく DNR とは互いに独立であると思われる．オメガモデルでの幾つかの証拠は確かめられるが，まだ証明は出来ていない．

その後，ML テストの相対性や収束速度に注目することにした．

0-1 無限列は，すべての low 集合に対して相対的に ML-ランダムとなるとき，L-ランダムという．また，Γを関数の集合とするとき ML テストの収束がΓに属する関数であらわされるとき，semi-Γ-ランダムという．2009 年度からは，彭寧寧と共にこの２つのランダム性を導入し，これら概念がどれくらいの複雑さと性質を持つのかを研究した．まずこれが，2-ランダムと 1-ランダムの間のどこにあたるのかについて調べ，真に中間に位置するであろうことの部分的結果を得たが，最終的に Yu により完全に証明されることとなった．

(2) 保存性に関する結果．

自然数の集合の列 < X_i:i in N>に対し，各 i に対して，X_i と C の共通部分が有限か，X_i の補集合と C の共通部分が有限であるとき，集合 C は< X_i:i in N>の密着集合という．任意の集合列に対し無限密着集合が存在することをあらわす公理を COH という，COH は２ベキの無限ラムジーの定理の弱系であるといえる．

まず木原貴行とともに，RCA_0 に COH を付け加えても$\forall X\exists !Y\varphi(X,Y)$型の文に関して証明できることが変わらないことを示した．ただし，$\varphi(X,Y)$は算術的論理式である．

また，このことについて特殊な強制法を考えることで直接証明する方法の別証明も見つけた．

任意の二階算術の論理式ϕに対し，

「$\forall n\exists X\phi(n,X) \Rightarrow \exists X\forall n\exists i\phi(n,X_i)$」

の形の公理図式を Π^1_∞-collection という．これは通常の選択公理図式と異なり，論理的には単に集合量化記号を数量化記号の前に持っていけることを保証するものである．一般にこのような公理図式は証明の強さを変えないことを期待したい．もちろん選択公理のままではこのようなことは言えないことに注意する．

実際に，COH + Π^1_∞-collection に対しても COH と同じく保存的性質が成り立つことも示した．

次に，generic filter の存在公理 GA が ACA と RCA_0 上同値となり，さらに WKL_0^+を含む公理として GA の弱形 wGA を導入した．これは ACA より真に弱く， $RCA_0 + \Pi^0_\infty$-帰納法にこの公理を加えても Π^1_1-文に関して証明できることが変わらないことも示した．

ただし，Π^0_∞-帰納法の条件を省いた場合は未解決である．

(3) 高階算術の枠組みによる逆数学．

逆数学の研究は２階算術の枠組みで行うのが普通である．ただし対象を直接扱うのではなく，２階の言語に合わせてコード化する必要があった．それを解消し，より一般的な形で逆数学を行うため，既存の高階逆数学を再検討した．そのため高階の対象に拡張した帰納的関数の理論を分析した．また実数上の計算可能性理論に優先法を導入することを試みた．しかし，いずれの場合においても部分的な結果しか得ることができなかった．

(4)逆数学の結果．

一般に組み合わせ論などの離散数学の定理の中に逆数学と相容れないものが多くあらわれる．そこでまず離散数学に関する逆数学について調べてみることにした．その中で，榊原拓とマトロイド理論および Menger の定理を研究した．これらについては部分的な結果しか得ていないが，その中で Tutte の定理が ACA と同値であること，linking に関するある性質も ACA と同値であることを示した．

一方，初年度で，佐藤隆および横山啓太と代数学における逆数学を扱った．そのときは

主に局所環や整数環の性質，部分群について考察した.

その後，新しい得られた手法をもとに，未開拓であったもの，特に可換環論とp進体に関する結果を調べ，一通りの成果を挙げることができた.

可換環論では特に加群に関して，加群の和の存在，零化イデアルの存在などがACAと同値になることを示した．また，準素イデアル分解等に関する部分的結果，デデキント環についてのいくつかの性質が成り立つことがACAと同値になることを示した．その他，基本的な定理の多くは RCA_0 で既に証明できるかACAと同値となることも示した．ただし，いくつかの例外と，未解決な問題を残している.

p進体については，Hensel’s Lemma やHasse-Minkowski Theorem などは RCA_0 で示せること，p進整数上の関数の様々な性質の多くは WKL_0 と同値となること，ただし，p進整数上の連続な部分関数を
p進体上の連続関数に拡張することはACAと同値になることなどを示した.

以上の結果は，それぞれまとめて論文にする予定である.

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

[1] M. Kumabe, T.Suzuki and T.Yamazaki. Does truth-table of linear norm reduce the one-query tautologies to a random oracle? Arch. Math. Logic 47 (2008), no. 2, 159-180（査読有）

〔学会発表〕（計４件）

[1] 山崎武，
Topics on Conservation Results,
Sendai logic and Philosophy seminar,
2009年2月24日，松島

[2] 佐藤隆，山崎武，横山啓太，
二階算術における代数学の展開，
日本数学会秋季総合分科会，
2007年9月24日，東北大学

[3] C.G. Liu，山崎武，
More on the partial randomness,
日本数学会秋季総合分科会，
2007年9月24日，東北大学

(海外セミナーでの発表)

[4]T.Yamazaki,
Computable Ring Theory and Reverse Mathematics, Nanyang Technological University Logic Seminar,
2010月12月10日（シンガポール）

[5]T.Yamazaki,
How to define randomness, Xian University of Technology,
2009年10月23日(中国)

〔図書〕（計１件）

[1]田中一之 他，ゲーデルと20世紀の論理学 3 不完全性定理と算術の体系，
東京大学出版会，2007，115-200頁

６．研究組織

(1)研究代表者

山崎　武(YAMAZAKI TAKESHI)

東北大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：30336812