

平成22年 5月13日現在

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2007～2009

課題番号：19740046

研究課題名(和文) 反応拡散系近似理論の新展開

研究課題名(英文) New development in the theory of reaction-diffusion system approximation

研究代表者

村川 秀樹 (MURAKAWA HIDEKI)

富山大学・大学院理工学研究部(理学)・助教

研究者番号：40432116

研究成果の概要(和文)：理工学分野において現れる様々な問題を含む非線形拡散問題を取り扱った。非線形拡散を含む問題の解析や数値解析において、拡散の非線形性をどのように扱うかが問題となっている。本研究では、非線形拡散問題の解が、拡散が線形である半線形反応拡散系の解により近似されることを示した。この結果は、非線形拡散問題の解構造が、ある種の半線形反応拡散系の中に再現されることを示唆するものである。一般に、非線形問題を扱うよりも半線形問題を取り扱う方が容易であるため、本研究は非線形問題の解析や数値解析に応用できることが期待される。

研究成果の概要(英文)：We dealt with nonlinear diffusion problems arising in a large number of important scientific and industrial contexts. The difficulties arise from the nonlinearity of the diffusion and the problem is how to handle the nonlinearity of the diffusion. In this study, we proved that the solutions of the nonlinear diffusion problems can be approximated by those of semilinear reaction-diffusion systems which include only simple reactions and linear diffusions. This indicates that the mechanism of nonlinear diffusion might be captured by reaction-diffusion interaction. Resolving semilinear problems is typically easier than dealing with nonlinear problems. Therefore, the theory of reaction-diffusion system approximation is expected to reveal effective approaches to the study of nonlinear problems.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,200,000	0	1,200,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,000,000	540,000	3,540,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：非線形拡散問題、退化放物型問題、非線形交差拡散系、反応拡散系、数値解法  
ステファン問題、多孔質媒体流方程式

## 1. 研究開始当初の背景

本研究では、氷の融解・水の凝固の過程を記述するステファン問題、地下水の流れを表す多孔質媒体流方程式、2種生物種の競合問題における互いの動的な干渉作用を記述する重定・川崎・寺本モデルなど、様々な問題を考えた。これらの問題は、非線形拡散を含む問題であり、非線形拡散問題という一つの方程式系で表される。非線形拡散を含む問題の解析や数値解析において、拡散の非線形性をどのように扱うかが問題となっている。この非線形性を取り除くために、半線形反応拡散系による近似について考えた。

本研究開始以前にも反応拡散系を用いた問題の近似はいくつかあったが、それらは個々の問題についての研究であり、問題意識も本研究のものとは異なるものであった。例えば、Hilhorst等('99, '01)は2種生物種の空間的棲み分けを理解するために、大きな競争係数を含む反応拡散系を取り扱った。競争係数が大きくなったときの極限について解析を行い、その極限がステファン問題の解により表現できることを示した。Knabner ('90)は反応性の液体が多孔質媒体の中を流れるときの流れ方を記述する反応拡散系を提出した。その反応の極限を考え、その極限がある種の多孔質媒体流方程式の解により捉えられることを示した。飯田等('06)は重定・川崎・寺本モデルを取り扱った。重定・川崎・寺本モデルには異種が高密度に棲む場所を避けるメカニズムが非線形拡散として内包されているが、そのメカニズムの理解のために、飯田等は異種が高密度に棲む場所を避ける方法について、その非線形拡散とは異なるものを考えた。結果として、ある反応拡散系を提出し、特別な仮定の下で、その解が重定・川崎・寺本モデルの解に収束することを示した。

この様に、既存の研究では、問題の解構造を理解するための解析の結果として、非線形拡散問題の解が半線形反応拡散系の解により近似されることが分かったのである。これらの研究は、半線形の問題を取り扱うことにより、元の非線形性の強い問題の解析が可能になることを示唆するものである。一般に非線形問題を取り扱うよりも半線形問題を取り扱う方が容易である。研究代表者は、この視点に立ち、非線形問題の解析の発展、応用を見据えた上で、個々の問題ではなく、一般的な非線形拡散問題の解を近似する統一的な半線形反応拡散系を提出し、解析することを考えた。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、非線形問題の解析の発展、応用を見据えた近似理論を構築することであり、具体的には以下のことである。

- (1) 非線形拡散問題の解を近似する統一的な半線形反応拡散系を提出する。
- (2) その反応拡散系の解の性質を調べ、その解が非線形拡散問題の解に収束することを示す。
- (3) その応用のひとつとして数値解析への応用を行う。

## 3. 研究の方法

### (1) 反応拡散系の提出

目的とする反応拡散系の導出については、そのアイデアは本研究開始以前から得られていた。それには、研究代表者のステファン問題に対するそれまでの研究が重要な役割を果たしている。

ステファン問題において水・氷の温度とエンタルピー(エンタルピーとは温度と潜熱の和)の関係は多価関数になる。これは、水が氷になるとき、氷が水になるときに一定量の熱を放出・吸収しないとその状態が変わらないことに相当している。しかし、この温度とエンタルピーの関係が多価であるためにステファン問題の弱解は一般に不連続になる。温度とエンタルピーの関係を連続な一価関数で近似することにより、滑らかな解を取り扱うことができる。ステファン問題の弱解は一般に不連続であるがこれを滑らかなもので近似するという事は、解析のしやすさや数値解法の有用性の面において重要であるといえよう。そこで、この考えをHilhorst等('01)によりすでに提出されていたステファン問題に対する反応拡散系近似に適用することにより、新たにステファン問題を近似する反応拡散系を提出した。同時に、それぞれ反応拡散系の収束性を研究することにより、反応拡散系の場合にも滑らかなもので近似することの有用性が分かった。この研究は、より一般的な問題を見据えての研究でもあった。温度とエンタルピーの関係を別の関数で近似しているため、間接的に異なる方程式を扱うことになる。そして、その違いを詳しく調べることは、より一般的な問題に対する反応拡散系近似の発見を可能にするであろうと考えた。実際に、一般的な非線形拡散問題を近似するシンプルな反応拡散系を導出することができた。

### (2) 収束性

これまでに個々の問題に対してなされてきた研究を見直し、それらを含む一般的な問題を対象とするため、その解析は困難である

と予想された。そこで、問題を退化放物型方程式と、交差拡散系の2つに大別して考えることにした。退化放物型方程式は拡散係数が0となる場合がある方程式である。このために、解が不連続になり、自由境界が現れるなど、取り扱いが複雑になる。ステファン問題や多孔質媒体流方程式は退化放物型方程式の典型例である。一方、多成分系において、拡散が相互に依存しあっているときに、拡散が交差しているといい、そのような系は交差拡散系と呼ばれる。重定・川崎・寺本モデルはその代表例である。このような問題では、交差拡散の効果により、定数定常解が不安定になることが知られている。生物の言葉を用いれば、交差拡散の影響が、生物種の空間的な棲み分けを引き起こす。したがって、交差拡散の効果が問題を複雑たらしめるのである。退化性と交差性の特徴は異なり、その解析を行う上では、それぞれに難しさがある。そのために、問題を2つに分けて扱うことにした。

収束性を示すために、非線形拡散問題の解の性質や、既存の数値解法など近似解法の調査を行った。この調査から、既存の解析手法はそのままで適用できないことが分かったが、一方で示すべきことの本質が見えてきた。反応拡散系の解についての様々な評価を風潰しに与え、関数解析の知識、一見本研究とは関係が浅そうな非線形半群理論についての知識を動員することにより、退化放物型方程式に対する収束性の証明にアプローチした。交差拡散系に対する研究でもそうである。ただし、解の性質が完全に異なるため、その解の性質、既存研究についての調査を入念に行い、関数解析的手法により証明に挑んだ。

### (3) 数値解析への応用

本研究の目的は、非線形問題の解析の発展、応用を見据えた理論を構築することである。その可能性、有効性を示すために、数値解析への応用を行った。

提案した反応拡散系に対して、様々な離散化を適用し、数多くの数値実験を行った。その中から最も効率的に数値解が得られる方法を抽出し、既存の数値解法との比較を行った。また、提出した数値解法の解析を行った。

## 4. 研究成果

研究計画通りに研究を遂行し、非線形拡散問題の解を近似する半線形反応拡散系を提出し、その解析を行った。提案した反応拡散系の解が、退化放物型方程式と交差拡散系の双方の解を近似していることを、十分に広い枠組みの中で示すことができた。この結果は、非線形拡散問題の解構造がある種の半線形反応拡散系の中に再現されることを示唆するものである。一般に、非線形問題を扱うよ

りも半線形問題を取り扱う方が容易であるため、本研究は非線形問題の解析や数値解析に応用できることが期待される。

解析は、拡散が交差していない退化型問題と、拡散が退化していない交差型問題の2つに分けて行ったが、これらは、理工学分野における多くの重要な問題を含んでいるため、十分に広い枠組みであると言えることができる。しかしながら、数学的な興味としては、退化交差拡散系といった、より広い、より解析の難しい問題も半線形問題により近似できることが分かれば面白い。この様な、より一般的な問題への拡張について今後も検討していく。

本研究により、非線形拡散問題における、拡散の非線形性が取り除かれたため、これを利用して、退化放物型方程式の数値解法の提出、その解析を行った。

退化放物型方程式は拡散の退化性のために、解が不連続になるなど、数値的に取り扱いにくい性質を有している。提案した反応拡散系近似では、1つの非線形方程式を1つの半線形偏微分方程式と1つの常微分方程式により近似している。そこから得られた数値解法を用いると、解の不連続性など非線形拡散の扱いにくい部分を計算コストが少なく、空間的な制約のない常微分方程式の計算に置き換えることができ、効率的に数値解を得ることができる。

この様に、半線形問題による非線形問題の近似は、効果的に、数値解析への応用ができる。今後は、反応拡散系近似理論を利用した非線形交差拡散系の数値解法の開発、解析を行うと共に、数値解析以外の解析への応用などを検討し、反応拡散系近似理論の発展、非線形問題の解析の発展を目指していく。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件)

- ① H. Murakawa, A relation between cross-diffusion and reaction-diffusion, *Discrete Contin. Dyn. Syst. S*, 採録決定, 査読あり.
- ② H. Murakawa, A solution of nonlinear diffusion problems by semilinear reaction-diffusion systems, *Kybernetika*, 45 (2009), 580-590, 査読あり.
- ③ H. Murakawa, A regularization of a reaction-diffusion system approximation to the two-phase Stefan problem, *Nonlinear Anal.*, 69 (2008), 3512-3524, 査読あり.
- ④ H. Murakawa, Reaction-diffusion

system approximation to degenerate parabolic systems, Nonlinearity, 20 (2007), 2319-2332, 査読あり.

[学会発表] (計 27 件)

- ① H. Murakawa, A solution of nonlinear diffusion problems by semilinear reaction-diffusion systems, Spatio-Temporal Patterns from Mathematics to Biomedical Applications, Archamps, France, 16 Mar. 2010.
- ② H. Murakawa, A relation between reaction-diffusion interaction and cross-diffusion, EQUADIFF12, Masaryk University, Brno, Czech Republic, 21 Jul. 2009.
- ③ H. Murakawa, A solution of parabolic free boundary problems by semilinear reaction-diffusion systems, Free Boundary Problems Theory and Applications, KTH, Stockholm, Sweden, 12 Jun 2008.

[その他]

無し

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

村川 秀樹 (MURAKAWA HIDEKI)  
富山大学・大学院理工学研究部(理学)・  
助教  
研究者番号 : 40432116

### (2) 研究分担者

無し

### (3) 連携研究者

無し