

平成 22年 3月 31日現在

研究種目：若手研究(B)  
 研究期間：2007～2009  
 課題番号：19740050  
 研究課題名(和文) ホモ／ヘテロクリニック軌道に対する精度保証法の構築とその偏微分方程式への応用  
 研究課題名(英文) Numerical verifications for homo/heteroclinic orbits and their applications to partial differential equations

研究代表者  
 平岡 裕章 (HIRAOKA YASUAKI)  
 広島大学・大学院理学研究科・准教授  
 研究者番号：10432709

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は力学系に現れる様々なホモクリニック軌道やヘテロクリニック軌道の存在証明を計算機を用いておこなうアルゴリズムを提示することである。期間内に得られた研究成果はリバーシブルな力学系に対しては十分高速なアルゴリズムを開発できた。メルニコフ積分の精度保証付き数値評価がアルゴリズムの中心をなす。一方、リバーシブルという仮定をのぞいた一般の力学系においては実用的な高速アルゴリズムはまだ開発できておらず、今後の課題として残された。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this research is to present fast algorithms to prove existence of homoclinic or heteroclinic orbits appearing dynamical systems by means of computers. The main result obtained in the research period is that we succeeded in showing reasonably fast algorithms to prove existence of homoclinic orbits in reversible dynamical systems. The key idea of this algorithm is to rigorously estimate Melnikov type integrals by computers. On the other hand, when we remove the assumption of reversibility, it does not yet succeeded in obtaining a good algorithm for this purpose.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	800,000	0	800,000
2008年度	600,000	180,000	780,000
2009年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	2,000,000	360,000	2,360,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：力学系, 精度保証付き数値計算, ホモ／ヘテロクリニック軌道, メルニコフ積分

## 1. 研究開始当初の背景

ホモクリニック・ヘテロクリニック軌道は力学系の構造解析において重要な位置づけを占める。その理由はこれらの軌道が力学系相

空間の骨格構造をとらえるものであるとみなせるからである。しかしながら具体的に力学系が与えられた際に、直接これらの軌道の存在を証明することは非常に難しい問題で

ある。一方、通常の数値計算を用いて近似的なホモクリニック・ヘテロクリニック軌道を構成することは可能であるが、その数学的厳密性については一般には不明であり、両者の橋渡しをする研究の存在が強く望まれていた。

この要望に応える可能性として注目されていた手法が精度保証付き数値計算法である。この方法は通常の数値計算では示すことのできない数学的な厳密性を保つものであり、各数値計算のステップで生じる誤差やモデル化の際に生じる誤差を厳密に評価しながら数値計算を実行していく点が特徴である。

このような研究の流れの中で本研究開始時点において知られているホモクリニック・ヘテロクリニック軌道の精度保証付き数値計算法は大きく分けて2つあった：

(1) 位相的手法：Conley 指数と呼ばれる力学系の不変集合に対して定まる位相不変量（通常はホモロジー群等を用いて表現される）を厳密にもとめることで解の存在証明を行う

(2) 解析的手法：微分方程式であたえられる力学系を積分方程式に変換し、無限次元空間上の作用素形式で問題を定式化しなおし、精度保証付き数値計算法である種の作用素ノルムを評価する

(1)については本研究代表者が大学院在籍時に研究を進めていたものであり熟知しているが、Morse 指数が等しいサドル間接続などが扱いにくい等の欠点があった。(2)についてはそのような欠点は回避されるものの、作用素ノルムの評価が非常に困難な問題も多々あり、汎用性という観点からは満足のいく方法とは言いがたい状況であった。

## 2. 研究の目的

上記背景が示している、ホモクリニック・ヘテロクリニック軌道の精度保証付き数値計算法として求められている条件は以下の2点である：

(1) Morse 指数等に仮定をおかない一般のホモクリニック・ヘテロクリニック軌道を扱える

(2) 精度保証付き数値計算法として高速かつ汎用性の高いアルゴリズムを提示する

このような背景のもとで本研究の目的は上記枠組みで扱われていない新たな手法を用いることで、より一般の枠組みで適用可能かつ高速アルゴリズムを提示可能な精度保

証付き数値計算法を開発することである。

更に位相的方法との接点も調べることで双方の長所を利用できるハイブリッド型の精度保証付き数値計算法を構成することも目指す。

## 3. 研究の方法

本研究最大の特徴はMelnikov型積分を精度保証付き数値計算によって厳密評価する点である。このMelnikov型積分は力学系におけるホモクリニック・ヘテロクリニック軌道の分岐問題を調べる際に導入された数学的手法であり1970代後半から1980年代にかけて詳しくその性質が調べられた。

本研究ではこのMelnikov型積分をホモクリニック・ヘテロクリニック軌道存在証明の精度保証付き数値計算法として用いる。ここで注意する点は、Melnikov型積分を用いたこれまでの力学系における解析はホモクリニック・ヘテロクリニック軌道の「分岐問題」に対して行われていることである。つまりこれまで解析の種となる存在が知られているホモクリニック・ヘテロクリニック軌道を用いてMelnikov型積分を評価することでパラメータの変化に伴い軌道がどのように振る舞うかを調べていたのである。よってこの議論を本研究課題に用いる為には修正を要することになる。

そこで本研究ではこの種となる既存のホモクリニック・ヘテロクリニック軌道の役割を通常の数値計算で得られる近似解で代用することを考えた。つまり数値近似解を用いてMelnikov型積分の議論を再構成し、ホモクリニック・ヘテロクリニック軌道の存在を証明する精度保証付き数値計算法で検証可能な十分条件を導きだすことを狙った。

この方法の特徴は当然のことながら既存のMelnikov型積分を用いた議論で必要となる存在が知られているホモクリニック・ヘテロクリニック軌道を数値近似解で代用することである。背景として近似的なホモクリニック・ヘテロクリニック軌道は比較的容易に高精度な近似解が得られることが知られているので、これらの近似解を用いた精度保証付き数値計算法が構成できれば汎用性の高いアルゴリズムとなりうることを期待される。

具体的なアルゴリズムは以下の手順で与えられる：

(1) 高精度ホモクリニック・ヘテロクリニック軌道を通常の数値計算によってもとめる。これらの近似ホモクリニック・ヘテロクリニック点列から多項式補間を行い連続関数としての近似ホモクリニック・ヘテロクリニッ

ク軌道を構成する。この際、平衡点近傍ではその第一固有値の減少/発散レートで近似軌道を構成する。

(2) 得られた近似ホモクリニック・ヘテロクリニック軌道に対する Exponential dichotomy の性質を用いて、軌道にそった安定部分空間と不安定部分空間を精度保証付きでもとめる。ここで有限時間ステップの部分では常微分方程式の初期値問題に対する精度保証付き数値計算法である Lohner 法を各時間ステップごとに適用することで軌道に沿った安定/不安定部分空間は計算される。一方、平衡点近傍の無限時間区間では平衡点の双曲性を用いて部分空間の評価をおこなう。

(3) (2)で与えられる近似ホモクリニック・ヘテロクリニック軌道にそった安定/不安定部分空間を用いて関数空間上の不動点形式を導入する。ここでこの関数空間は時間正負それぞれに対する有界連続関数とその sup ノルムが定めるバナッハ空間である。また不動点形式は時間正負に応じて、近似ホモクリニック・ヘテロクリニック軌道が定める積分方程式であり、その上の不動点形式の不動点はそれぞれ平衡点の安定多様体と不安定多様体の特徴づけるものである。

(4) (3)で特徴付けを行った安定多様体と不安定多様体の交わりを調べることでホモクリニック・ヘテロクリニック軌道の存在を証明する。このステップは(3)で求まる安定多様体上の軌道と不安定多様体上の軌道を定める初期値に対応する有限次元ベクトル空間上で不動点形式を構成することになる。有限次元であることから Brower の不動点定理を交わりの存在証明ではもちいる。

#### 4. 研究成果

このアルゴリズムにより得られた成果を以下にまとめる。まずリバーシブルな力学系においては高速なアルゴリズムとして動作することが確認できた。ここで力学系がリバーシブルであるとはある線形変換  $S$  によって力学系

$$dx/dt=f(x), \quad x=(x_1, \dots, x_n)$$

が

$$f(Sx)=-Sf(x)$$

なる対称性を持つものをいう。リバーシブル系に現れるホモクリニック・ヘテロクリニック軌道には幾つかの際立った性質があり、その代表的なものは  $S$ -不変な超平面によるホ

モクリニック・ヘテロクリニック軌道の特徴付けである。これらの特徴付けを用いることで安定多様体と不安定多様体の交わりの余次元が一減り、現象としてはより発生しやすくなる。これに伴い、アルゴリズム・ステップ1で必要となる近似解の精度、ステップ2での精度保証を行う評価の範囲等の条件が緩和され、数値的に検証が行いやすくなる。

たとえば KdV 型の孤立波に対応するホモクリニック軌道（力学系の相空間2次元）や Gray-Scott モデルに現れる孤立波解（力学系の相空間次元4）などはリバーシブル系の例であり、本手法を用いてホモクリニック軌道が数学的に存在証明された。

一方リバーシブルである仮定をのぞくと状況が異なる。もっとも異なる点は安定多様体と不安定多様体の交わりを調べるステップ4で必要となる計算精度がきわめて高くなることである。これはリバーシブル系である際に余次元が一つ減っていたことを思い出すと想像できる現象である。この為に、ステップ1, 2でより高精度かつ狭い範囲での精度保証が必要となる。現時点ではまだ修正できていないが、これらの為には多倍長演算数値計算法を導入する必要があるであろう。つまり通常の倍精度ではなく多倍長計算によりより高精度な近似解を構成し、ステップ2の Lohner 法も多倍長のレベルで構成し直すのである。これにより、原理的にはリバーシブルである仮定を外すことに伴う困難は回避できるはずである。ただし、これによりアルゴリズムの速度が落ちることが予想されるため、プログラミングのレベルでの高速化等の作業も必要となるであろう。

また、Melnikov の方法のみではなくその他の類似の手法

- Lin の方法
- Sandstede の方法

を本研究のアイデアを用いて精度保証付き数値計算法として定式化する方法も有効かもしれない。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計5件)

① 平岡裕章, Pawel Pilarczyk, CHomPソフトウェア入門, 応用数理 Vol. 18 No. 1(2008), 48-55. 査読有

② Y. Hiraoka, Topological regularizations of the triple collision singularity in the

3-vortex problem, Nonlinearity Vol.21 (2008), 361-379. 査読有

③ Y. Hiraoka, Rigorous numerics for symmetric homoclinic orbits in reversible dynamical systems, Kybernetika Vol.43 (2007), 797-806. 査読有

④ Y. Hiraoka, Construction of approximate solutions for rigorous numerics of symmetric homoclinic orbits, RIMS Kôkyûroku Bessatsu B3 (2007), 11-24. 査読有

⑤ 平岡裕章, リバーシブル系に現れる対称ホモクリニック軌道の計算機援用証明 (京都大学数理解析研究所講究録, 力学系理論の最近の発展, 2007) Vol.1552, 12-21. 査読有

[学会発表] (計2件)

① Yasuaki Hiraoka, Rigorous numerics for the existence of homoclinic orbits via exponential dichotomy, 2008 International Workshop on Numerical Verification and its Applications, March 1~7 2008, Okinawa.

② 平岡裕章, Topological regularizations of the triple collision singularity in the 3-vortex problem, 日本数学会2007年度秋季応用数学分科会, 2007年9月24日, 東北大学

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

平岡裕章 (Yasuaki Hiraoka)  
広島大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号: 10432709

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号:

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号: