様式Ｃ-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年5月２５日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：2007 ～ 2010
課題番号：１９７４００５５
研究課題名（和文）　アデール上の確率過程の解析

研究課題名（英文）　Analysis of stochastic processes on the adeles

研究代表者
安田　公美　　（YASUDA KUMI）
慶應義塾大学・商学部・准教授
研究者番号：４０２８４４８４

研究成果の概要（和文）：アデール環上のマルコフ過程を構成し，その各 p 成分の p 進整数環からの脱出時刻と、脱出時刻における p 成分の p 進ノルムの分布を解析した。また、アデール値マルコフ過程の有限整アデールからの脱出時刻の分布を決定した。それらの脱出時刻および脱出時刻の p 成分の p 進ノルムを用いて、リーマンのゼータ関数をはじめとするオイラー積表示をもつ関数の表示を行った．さらに、リーマンのゼータ関数のある点とその複素共役における値，あるいはその実部における値との関係についての関数等式を導いた.

研究成果の概要（英文）：Construction of Markov processes on the adeles, and analysis of the distribution of the exit time from the p-adic integer ring, and the p-adic norm of the p-component of the processes at the exit time. Description of the distribution of the exit time of the adelic processes from the finite integral adeles. Formulae for Riemann's zeta and other functions with Euler product representations in terms of the exit time of the processes and the p-adic norm of the p-component at the exit time. Functional equations relating the values of Riemann's zeta function at a point and its complex conjugates or its real part.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	500,000	0	500,000
２００８年度	500,000	150,000	650,000
２００９年度	500,000	150,000	650,000
２０１０年度	500,000	150,000	650,000
総　計	2,000,000	450,000	2,450,000

研究分野：確率論
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：アデール環、確率解析

１．研究開始当初の背景

１９９０年以降，p 進体をはじめとする非アルキメデス的距離空間の上の確率解析の研究が行われ，確率測度の分類とユークリッド空間との比較，広いクラスの確率過程の構成とその性質の分析が進められてきた．研究責任者は特に，p 進体上の準安定過程について詳しく解析し，その特性量について研究してきた．その中で，p 進体やその拡大体の確率過程を用いて数論的対象，特に素数に関係する関数を表現，解析できる可能性に注目した．実際，p 進値準安定過程の p 進整数環（単位円）からの脱出時刻におけるモーメントが，リーマンのゼータ関数のオイラー因子の２点における値の比を与えることを得ていた．ただ，この結果は各素数 p ごとにオイラー p 因子を表示しているものであり，ゼータ関数そのものの研究においては，すべての素数 p についてその積を表現する確率論的対象を必要としていた．そのため，p 進体の直積空間

の部分集合であって，局所コンパクト性など確率解析を展開するのに適した空間であるアデール環に注目した．ゼータ関数をはじめとする数論的関数に確率解析の手法でアプローチするため，アデール上で確率解析を展開した上で確率過程を用いて関数を表示し，その確率過程の性質と関数の性質の間の関係を記述する必要があった．

２．研究の目的

各素数 p ごとに得ていたオイラー因子の表示式を，その積に対する表現式へと発展させることを目的とする．そのため，アデール環を状態空間とするマルコフ過程で, 各 p 成分が p 進体上の加法過程で, それぞれ独立であるものを構成する. 特に各 p 成分が上述の p 進体上の準安定過程の分布に従うものを構成し，いくつかの停止時刻におけるモーメントなどの計算を行なう．次に，既に得ている各 p について成立するオイラー因子との関係がこの新しい確率過程にどのように反映されているのかを分析し，　まずは p についての直積の形の表現式を与え，これを一つの確率過程に関する量を用いて再構成する．さらに，この確率過程の性質がゼータ関数とどのように関わっているか詳しく調べ，関数に関する命題が確率過程に対するどのような命題へと読み替えられるかを検証する. その上で, 確率解析の側からのアプローチが可能な問題について関数の解析を進める．

また, アデール上のマルコフ過程について, 上で述べた p 成分ごとの停止時刻ではなく, 過程そのものからグローバルに定まる特性量を用いて，ゼータ関数など重要な関数を表現することを目的とする．これらの表現式を通じて数論的問題の確率論的解釈を与え，未解決問題が確率過程のどのような性質と関わっているかを調べる．

３．研究の方法

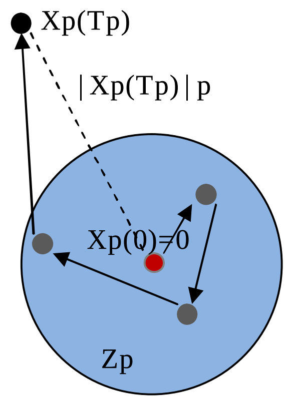
アデール環上のマルコフ過程を構成するための準備として，アデール環を覆う可算個の部分集合（p 進円板の直積）を状態空間とするマルコフ連鎖を構成する．その手法は, 得られるマルコフ連鎖の列が円板の半径に関する整合性を持つように調整された係数をもつ後退・前進微分方程式を考え，それが解を持つための条件を導き，実際に解くことである．得られたマルコフ連鎖の列の，各 p 進円板の半径を無限小とする極限として，アデール環上のマルコフ過程を決定する．

上述の方法で構成されたマルコフ過程について，各成分が準安定となるための条件，および過程そのものが（アデール環の積について）準安定となるための条件を検証する．得られたアデール上の確率過程について，すでに得られた各 p における関数の表現式が，これらの確率過程を通じて融合した形で表示できるよう，特徴的な量の期待値などのデータを用意する．特に，アデールの基本的な部分集合からの過程の脱出時刻の分布について詳しく解析する．このとき，p 進円板やその直積からの脱出時刻については，マルコフ過程を構成する準備として与えたマルコフ連鎖の生成作用素を求めることで解析可能である．こうして得られた特性量の中から重要と思われるものについて，興味深い関数の性質を表現するものかどうかをひとつひとつ検証する.

４．研究成果

アデール環を可算個に分割する互いに交わらない部分集合族を考え，それらを状態空間とするマルコフ連鎖を構成した．このマルコフ連鎖の，状態空間を構成する各部分集合の大きさを無限小とする極限をとることにより, アデール環上のマルコフ過程で各 p 成分が独立であるものを構成した．このマルコフ過程は，各 p ごとに与える数列 $\{a(p,M)\}$ （M は整数）で定まる．特にその各 p 成分が準安定性を持つためには, 各数列　$\{a(p,M)\}$ が等比数列 $a(p,M)=c(p)p^{-a(p)M}$ であって，$\Sigma c(p)$ が有限であることが必要十分であることが分かった．さらに過程がアデール上の準安定過程となるための条件は，$a(p,M)=c(p)c^{-M}$（ただし，c は定数で，$0<c<1$）で与えられることが判明した．

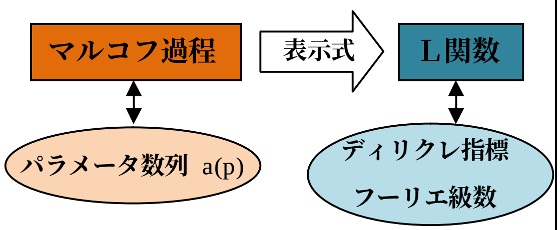
上で得られたマルコフ過程 $X(t)=(X_p(t))$ について，その各 p 成分 $X_p(t)$ の生成作用素を求めることにより, $X_p(t)$ の p 進整数環 Z_p からの脱出時刻 T_p の分布を決定した．P 進体が完全非連結集合であることから, $X_p(t)$ は純ジャンプ過程であり，したがって脱出時刻 T_p における p 成分 X_p の p 進ノルム $|X_p(T_p)|_p$ は１より真に大きい値をとる．過程 $X_p(t)$ の生成作用素を計算により求め, これを用いて　$|X_p(T_p)|_p$ の値の分布を決定し, 特に，そのモーメントが求められた．



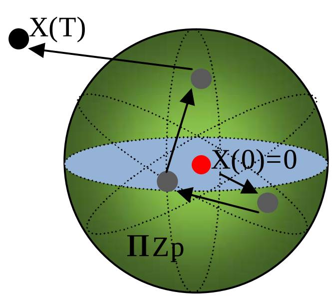
そして，各 p 成分が準安定であるマルコフ過程について, p 成分の p 進整数環 Z_p から

の脱出時刻における p 進ノルム $|X_p(T_p)|_p$ を用いた，リーマンのゼータ関数のオイラー積の収束領域における表現式 $\zeta(s)=E(\Pi(1-p^{-a(p)})^{-1}|X_p(T_p)|_p^{-s+a(p)})$ を与えた．この式はゼータ関数を非アルキメデス的確率論に関わる量を用いて表現する，過去にはないタイプのものである．またこの式は，マルコフ過程を決定するパラメータ数列 a(p) を含むため，目的に応じてこのパラメータを取り換えて利用することが可能である．実際，a(p) をうまく取ることにより，この表現式の応用として，リーマンのゼータ関数のオイラー積の収束領域内の点 s における値と，その点の複素共役 $\tilde{s}$ における値との関係を与える関数等式 $\zeta(s)E(\Pi|X_p(T_p)|_p^{\tilde{s}})=\zeta(\tilde{s})E(\Pi|X_p(T_p)|_p^{s})$ を導いた．また，これとは別のパラメータを選択し，オイラー積の収束域内の点 s=x+iy におけるゼータ値を，その実部 x におけるゼータ値と虚部 y のみに依存する期待値の積 $\zeta(s)=\zeta(x)E(\Pi|X_p(T_p)|_p^{-iy})$ として表現した．この式を用いて，上述のものとは異なる複素共役での値の間の関数等式 $\zeta(s)E(\Pi|X_p(T_p)|_p^{iy})=\zeta(\tilde{s})E(\Pi|X_p(T_p)|_p^{-iy})$ を示した．

脱出時刻 Tp を用いたオイラー積の表現式は，表示したい関数に応じてパラメータ数列 a(p) を選択すればよい．したがって，ディリクレのL関数や保型L関数についてこの公式を適用すると，関数を定めるディリクレ指標やフーリエ級数の違いが，対応するアデール上のマルコフ過程のどのような確率論的性質として反映されるかを比較できる．



次に，アデール上のマルコフ過程の生成作用素を求め，これにより，過程の有限整アデール ΠZp からの脱出時刻 T の分布を決定した．



特に，脱出時刻 T の期待値が，マルコフ過程を決定するパラメータ数列 {a(p,M)} を用いて $E(T)=(\Sigma a(p,0))^{-1}$ で与えられるとの計算結果を得た．そこで，このパラメータ数列を目的に応じてうまく選ぶことにより，リーマンのゼータ関数のみならず，オイラー積表示を持つ任意の関数 ξ のオイラー積の収束域に属する実数 x での値を，T の期待値の逆数の指数という極めて簡潔な形 $\xi(x)=\exp(E(T)^{-1})$ で表示することができた．

また，リーマンのゼータ関数の非零領域と深い関わりを持つチェビシェフ関数 $\psi(x)=\Sigma k(p,x)\log p$（ただし，すべての素数 p についての和．$k(p,x)=\max\{k: k\leq\log x/\log p\}$）についての結果も得た．すなわち，アデール上の準安定過程の指数を適当に選べば，チェビシェフ関数は有限整アデールからの脱出時刻 T の期待値の逆数に等しい：$\psi(x)=E(T)^{-1}$．一方，チェビシェフ関数の無限大における漸近挙動がリーマンのゼータ関数の非零領域の記述，さらにはリーマン予想と同値であることが知られている．このことから，この研究で得たマルコフ過程のある列をとったとき，それらの有限整アデールからの脱出時刻 T の期待値の漸近挙動の解析が，ゼータの非零領域の解明に結びつくことが分かった．ここで確立した手法は，チェビシェフ関数のみならず，素数 p に依存する量の和の形で表わされる関数について同様に適用することができる．すなわち，解析したい関数ごとにマルコフ過程のパラメータをうまく取り，その過程の有限整アデールからの脱出時刻の期待値またはモーメントを用いて関数を表示できる．この方法により，さらに様々な関数をアデール上の確率過程と結びつけ，新しい解析手法を提供できる可能性がある．

以上の研究結果により，素数 p に依存する量の和や積で与えられる関数にアデール上のマルコフ過程を対応させ，関数を表現する手順が確立された．表現式そのものが関数等式など新しい結果を直接に導くことも期待される．一方，それぞれのマルコフ過程はパラメータ数列 a(p,M) で定まり，この数列とマルコフ過程の基本的性質との間の関係も明らかになってきた．状態空間であるアデールではある程度，古典的な確率解析の手法が働き，また，これまでに研究されてきた p 進体上の確率過程論の応用により解明できる部分もある．アデール上のマルコフ過程の性質の多くは未だ明らかではないが，今後，再帰性や漸近挙動についてより解析が進めば，関数の研究に結びつくことが期待できる．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

① Witold Karwowski and Kumi Yasuda, Dirichlet forms for diffusion in R^2 and jumps on fractals : The regularity problem, p-adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications, 査読有, ２巻, ２０１０年, ３４１～３５９ページ.
② Kumi Yasuda, Markov processes on the adeles and representations of Euler products , Journal of Theoretical Probability, 査読有, ２３巻, ２０１０年, ７４８～７６９ページ.
③ Kumi Yasuda, Markov processes on R^2 with ultrametric jumps, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, １６７２巻, ２０１０年, １１１～１１６ページ.
④ Kumi Yasuda, Markov processes on the adeles, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, １５９０巻, ２００８年, １２０～１２５ページ.

〔学会発表〕（計７件）

① Kumi Yasuda , Adelic processes and number theoretical functions, Number Theory and Probability, ２０１０年９月１５日, 京都大学数理解析研究所.
② Kumi Yasuda, Markov processes on the adeles and applications, 神楽坂解析セミナー, ２０１０年3月１８日, 東京理科大学理学部.
③ Kumi Yasuda, Markov processes on the adeles and representations of Riemann zeta function, Seminar on Mathematics, ２０１０年３月１１日, Opole University（ポーランド).
④ 安田公美, p 進値確率過程について, 確率論ヤングサマーセミナー, ２００９年８月２０日, 国民宿舎つづらお荘.
⑤ 安田公美, Q_p のはなし, 確率解析の理論と応用 -さよなら箱崎-, ２００９年７月２５日, 九州大学数理学研究院.
⑥ Kumi Yasuda, Markov processes on R^2 with ultrametric jumps , Stochastic Analysis of Jump Processes and Related Topics, ２００９年7月9日, 京都大学数理解析研究所.
⑦ 安田公美, Markov processes on Adeles, 数論と確率論, ２００７年１０月１５日, 京都大学数理解析研究所.

６．研究組織
(1)研究代表者
安田　公美（YASUDA KUMI）
慶應義塾大学・商学部・准教授
研究者番号：４０２８４４８４