

機関番号：32619

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2007～2010

課題番号：19740057

研究課題名（和文） グラフの部分構造と連結因子に関する研究

研究課題名（英文） Study on subgraphs and connected factors in graphs

研究代表者

松田 晴英 (MATSUDA HARUHIDE)

芝浦工業大学・工学部・准教授

研究者番号：00333237

研究成果の概要（和文）：グラフの因子問題は、与えられたグラフに対して、ある特定の性質をみたす全域部分グラフを見つけるという問題である。全域部分グラフとは、与えられたグラフのすべての点と一部の辺からなるグラフのことである。本研究の目的は次の2点にあった。(1) グラフ全体でもつ構造がグラフの一部分でもあり得るかを研究し、グラフ全体で知られている性質との関連性を追求していく。(2) 連結因子の構造を様々な角度から検証し、その存在定理の解決方法を提示する。これらについて、いくつかの成果が得られた。

研究成果の概要（英文）：A subgraph of a graph G is a graph if each of vertices belongs to the set of vertices in G and each of edges belongs to the edges in G . A factor of a graph is a spanning subgraph with some property. The main purposes of this research are the following: (1) We find mathematical structures in the specified subgraph of a graph, which is similar to those in the spanning subgraph of a graph. (2) We also find sufficient conditions for a graph to have some kinds of a connected factor. For these purposes, some results are obtained in this research.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	600,000	0	600,000
2008年度	500,000	150,000	650,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
年度			
総計	2,100,000	450,000	2,550,000

研究分野：グラフ理論

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：グラフ，グラフ理論，全域木，木，因子，部分グラフ，次数条件

1. 研究開始当初の背景

グラフの因子理論は、グラフという概念が誕生した初期のころから長きに亘って研究され続けている歴史が長い分野のひとつであり、現在においても国内外で活発に研究されている重要課題である。例えば、2002年にはアメリカのVanderbilt Universityにおいて、グラフの因子に特化した研究集会が開かれたことがあるほどである。また、これまでの

経緯および現在の活発な研究状況から推測すると、グラフ因子は今後もグラフ理論の中心的課題のひとつとして研究されていくと思われる。

この分野における最も大きな成果は、Tutte、Lovász によって得られたグラフがある因子をもつための必要十分条件である。しかし、これらの結果には主に次の3つの問題点がある。

(1) これら必要十分条件は、かなり複雑な評価式である。

(2) 与えられたグラフにおいて、指定した部分グラフに特定の性質をみたすグラフがあるか否かが一般には判定できない。

(3) 対象となる因子が、連結であるか否かが判定できない。

(1)の問題に対しては、グラフが所望の因子をもつための簡明な十分条件を得ることが近年の重要な研究課題であり、これまで私を含め、十数年の間に国内外の多くの研究者が多くの結果を出している。

(2)の問題に対しては、私の過去の研究で、グラフ因子の基本的構造ともいえるマッチングを自然に拡張した概念である奇次数部分グラフに対し、この奇次数部分グラフがグラフの一部分を覆うための必要十分条件を得ることができた。これはグラフ全体での結果をグラフの一部分へも自然に拡張できた萌芽的結果であり、グラフ全体がもつ様々な構造が部分グラフにもあり得るのではないかということに注目するきっかけとなった。実際、さらに研究を進めると、平成 13~14 年度には加納幹雄茨城大学教授と私との共同研究において、これまでに知られている多くの因子を包含する新たな因子を定義し、グラフがこの因子をもつための必要十分条件を得ることができた。この結果を掲載している論文は、その referee's report において、” The publication is strongly recommended.” との評価を頂き、国際専門誌に掲載されている。これらにより、(2)の問題を部分的に解決している。

(3)の問題については重大とされながらも、これまであまり研究がなされていなかった。

2. 研究の目的

上記の学術的背景を踏まえ、本研究では、次の2点を研究目的とした。

(1) グラフ全体でもつ構造がグラフの一部分にもあり得るかを研究し、グラフの全体で知られている性質との関連性を追及していく。グラフにおいて予め指定された部分グラフに注目し、それが特定の性質をみたすグラフで覆うことができるか否かを判定する必要十分条件をみつける。

(2) 連結因子の構造を様々な角度から検証し、その存在定理の解決方法を提示する。

研究目的(1)については、その構造が徐々に明らかとなりつつあったが、十分な解決には至っていなかった。特に、グラフに関して所望の構造があるか否かという課題は、グラフ全体であれば多くの性質が知られているにも関わらず、一部分に注目した結果は、最近になって活発化してきた研究であるため、解決すべき課題が多く残されている。

研究目的(2)については、これまで、その構造の複雑さからほとんど研究がなされていなかったが、過去の私の研究において、各点から出る辺の本数が制限された木の構造に注目して、いくつかの結果を得ている。

3. 研究の方法

まずは、グラフの部分グラフや因子、ハミルトンサイクルが存在するための十分条件について、過去の結果を調査した。

次に、その研究が活発であるハミルトンサイクルの存在で得られている十分条件について、これらが部分グラフや因子にも適用できるか否かを検討した。この結果、ハミルトンサイクルで得られている結果を自然に拡張する形で、部分グラフや因子について、いくつかの結果が得られた。

また、これらを論文としてまとめたり、研究発表を行ったりした。

4. 研究成果

各点から出る辺の本数が制限されたグラフの木構造に注目して、いくつかの結果を得た。また、研究目的(1)、(2)を同時にみたすような結果、すなわち、グラフの部分に所望の連結な木構造があるための十分条件についても得ることができた。

まず、研究目的(1)については、当分野におけるこれまでの研究では、グラフ全体に所望の性質をみたす全域部分グラフ(因子)があるかという問題に対して、多くの研究がなされ、多くの結果が得られている。しかし、グラフに関して所望の構造があるか否かという課題は、グラフ全体であれば多くの性質が知られているにも関わらず、一部分に注目した結果は、最近になって活発化してきた研究であるため、解決すべき課題が多く残されている。この点に注目して、指定した点を端点とする全域木が存在するための次数条件を得ることができた。

主定理の概略は以下の通りである。

($k+1$)-連結グラフ G において、互いに辺で結ばれていない2点の組すべてに対し、これら2点から出る辺の本数が $|G|+1$ 本以上ならば、 G には指定した点を端点とする全域木がある。

また、この系として、指定した点を端点として含む全域木がグラフに存在するための次数条件も得られた。

一方、研究目的(2)について、既存の因子に対しては、これまで多くの研究者が多くの結果を残しているが、そのほとんどが連結性を問われていない因子に関するものであった。これに対し、本研究では2つの方向性により、連結因子構造の解明に取り組んだ。まずは連結因子の基礎研究として、2部グラフに正則因子が存在するための次数条件を得た。この結果については、2008年7月に電気通信大学で開催された「純粋数学及び応用数学としての組合せ論・離散数学そしてその周辺ワークショップ」で発表を行った。この結果は発表時点では単独研究であったが、この発表をきっかけにして、他の研究者から有益なアイデアを得ることができ、一般的な成果へと拡張することができた。さらに、グラフの木という連結因子が存在するための次数条件も得られた。これは研究目的(1)も部分解決する結果であり、今後、本研究課題を続けていく上で重要な位置を占める、大変興味深い結果である。

主定理の概略は以下の2点である。

(i) 与えられたグラフにおいて、指定した点部分集合に含まれる任意の独立な k 点から出る辺の本数が $|G|-1$ 本以上であるならば、各点から出る辺の本数が最大 k であり、指定した点部分集合をすべて含むような木が存在する。

(ii) 指定した点部分集合を A とし、 $w(G-A)$ を誘導部分グラフ $G-A$ における成分の個数とする。このとき、与えられたグラフにおいて、 A に含まれる任意の独立な $k-w(G-A)$ 点から出る辺の本数が $|G|-1$ 本以上であるならば、 A の各点から出る辺の本数が最大 k であるような全域木が存在する。

これらの結果は1975年に Sein Win によって得られた全域木の結果を部分グラフへ自然に拡張した結果であり、次数条件の下界は最良である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

1. H. Matsuda and H. Matsumura, Degree conditions and degree bounded trees, *Discrete Mathematics* 309 (2009) 3653--3658.

2. Y. Egawa, H. Matsuda, T. Yamashita, and K. Yoshimoto, On a spanning tree with specified leaves, *Graphs and Combinatorics* 24 (2008) 13--18.

[学会発表] (計3件)

1. 松田晴英: “連結因子の次数条件について” RIMS 共同研究「次数条件と因子が支配するグラフの幾何と解析」. (2008/10/03). 京都大学

2. 松田晴英: “A degree condition for a bipartite graph to have a regular factor” 純粋数学及び応用数学としての組合せ論離散数学そしてその周辺ワークショップ. (2008/07/04). 電気通信大学

3. H., Matsuda: “A degree condition for a bipartite graph to have a regular factor” The Kyoto International Conference on Computational Geometry and Graph Theory (KyotoCGGT2007). (2007/06/15). 京都大学

[図書] (計0件)

なし

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

なし

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

○取得状況 (計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

[その他]

ホームページ等

<http://www.sic.shibaura-it.ac.jp/~hmatsuda/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

松田 晴英 (MATSUDA HARUHIDE)

芝浦工業大学・工学部・准教授

研究者番号：00333237

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし