様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21 年　３月　　20 日現在

研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：2007～2008
課題番号：19740064
研究課題名（和文）　ラフパス理論とその確率論への応用

研究課題名（英文）　Rough path theory and its application to probability theory

研究代表者
稲浜　譲　（INAHAMA　Yuzuru）
東京工業大学・大学院理工学研究科・助教
研究者番号：　80431998

研究成果の概要：ラフパス理論とは、伊藤清の創設した通常の確率微分方程式論を「非ランダム化」するものであり、その結果、微分方程式の入力パスを出力パスに対応させる伊藤写像は連続写像になる。本研究においては、この伊藤写像にたいしてある種のテーラー展開を試み、それを利用して確率論の有名な漸近定理(大偏差原理やラプラス近似)を示した。またこの種の定理をバナッハ空間に値をとるプロセスに適用すると、通常の確率微分方程式論では証明できていない例が示せることがわかった。現在は、この種の定理をいろいろな場合に拡張中である。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,000,000	0	1,000,000
2008 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,900,000	270,000	2,170,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：　数学　　基礎解析学
キーワード：確率解析、無限次元解析、ラフパス理論、確率微分方程式、伊藤写像、
大偏差原理、ラプラス近似、

１．研究開始当初の背景

ラフパス理論を説明する前に、まず確率微分方程式明しなければばらない。確率微分方程式は大雑把にいえば常微分方程式にブラウン運動からくるランダムな項を摂動として付け加えたものだといえる。この理論は現代確率論の中心分野である。応用範囲も非常に広く、熱方程式論、微分幾何学、統計物理、統計学、数理ファイナンスなどなど多岐にわたる。
確率積分、確率微分方程式は伊藤清により発明されて以来約７０年、徹底的に研究されて発展してきた。確率微分方程式は「常微分方程式にランダム項を付けたもの」と説明した

が、実はこの確率積分という新しい積分を本質的に使っている。
この確率積分とは、ブラウン運動のサンプルパスに沿った線積分のことで、マルチンゲール積分論によっている。したがって、マルチンゲールという完全に測度論的なものに基づいているために、測度ゼロのあいまいさ、という確率論によくでてくるめんどうな議論からはのがれられない。また、確率微分方程式は定義から確率積分方程式であるので、これにもまた同様の問題が発生する。特に、確率微分方程式を駆動するパスに解になっているパスを対応づけする写像を伊藤写像というが、これも当然、各点（各パス）で定義されているわけではなく、連続写像にもならない。
この常識が約１２年前に T. Lyons により創設されたラフパス理論でくつがえされた。Lyons は普通の意味でのパス(第１レベルのパス)に加えて、第２レベルのパスというもの組にしたものを考えて、これをラフパスとなづけた。有界変動などの性質のいいパス空間は、自然にラフパスの空間の部分集合だと思える。
さて、ラフパスに対しては、それに沿った線積分というものが定義でき、しかもそれを写像としてみると、ラフパスの空間の位相に対して、連続になっている。これから常微分方程式も定義できて、伊藤写像はこの世界では各ラフパスに対して定義できていて、連続写像なのである。従来の常識を覆す新理論であった。
筆者はこの課題をはじめる前に、このマルチンゲール積分論を使わない、という特徴がバナッハ空間でいきることを利用して(一般のバナッハ空間に値をとる確率積分論はない)、ループ群に値をとるブラウン運動をラフパス理論で構成した。また、大偏差原理という極限定理の証明もつけていたという状況であった。大偏差原理の精密化であるラプラス近似も簡単なバージョンはできかかっていて、どうまとめあげようか、という段階であった。
ちなみに、大偏差原理とは確率測度の列が、（たとえば）点測度に収束している場合に、その重みが集まってくる点からはなれた集合の重みがゼロに収束する指数的速度をみるものである。これは同値な言いかえをすると、その測度からきまる積分量の対数をとったものの漸近挙動の研究である。
ラプラス近似とはこの積分量を対数をとる前のそのままの形で漸近挙動を調べることである。ラプラス近似は大偏差原理を一段階深くしたものだといえる。

２．研究の目的

ラフパス理論の確率論における有用性を示すべく、ラフパス理論の枠組みでの漸近定理を中心として研究した。これは微積分でたとえてみると、テーラー展開のようなものである。
しかも、通常の確率論との差別化をはかるために、バナッハ空間に値をとる拡散過程を応用例として取りあつかった。
また、残念ながら意味のある発見はできなかったのだが、確率論の具体的なモデルで、ラフパス理論の応用例となるものを常に探している。これは、具体例が少ないというこの理論の弱点を克服するためには、ぜひとも必要なことである。

３．研究の方法

数学の個人研究なので、研究の方法というほどおおげさなものはないのだが、基本的には自分の手を動かして計算すること、および散歩などをしながら、そもそもどういう計算をすればいいのか、という構想を練ることがほとんどである。
また、論文や本を読んで情報収集をして、世界の情勢を知ることにも、それなりの時間をさいた。
もちろん、研究集会への出席と発表、また同分野の研究者との情報交換は重要もある。この２年間にかなりの数の国内外の集会に参加して、４回発表した。これらはすべて科研費のおかげである。

４．研究成果

まず、これは途中までできかかっていたのだが、ラフパス理論で伊藤写像のテーラー展開をほぼ完成させ、それを応用して、バナッハ空間に値をとるある種の拡散過程に対して、大偏差原理やラプラス近似などをまとめあげた。この成果は主に論文①、③などにまとめてある。

また、このなかで鍵となったのは、伊藤写像のテーラー展開であるが、これをさらに一般化して、以下の場合に拡張した。

（１）roughness という定数が一般の場合.

この場合はいままで２重積分までしかあらわれなかったものが、高階の重複積分まであらわれることになって、処理が大変になる。
（２）伊藤写像の展開の基点として、いままでは有界変動のパスだけを想定していたが、今回は q 次変動有限のパスでもできることを示した。(ただし　1<q<2)。
（３）伊藤写像がいままでは固定されたものであったが、今回はパラメーターに依存して、うごいてもいいとした。

以上の一般化は、実は現在とりくんでいるフラクショナル・ブラウン運動で駆動される（ラフパスの意味での）確率微分方程式の解に対するラプラス近似型の漸近定理の証明に使うことになる予定である。このケースに関するラプラス近似は、ラフパスを使うものであれ、使わないものであれ、知られていないようなので、挑戦してみる価値はあるように思う。

ちなみにフラクショナル・ブラウン運動とは、「過去の記憶を持つ」タイプの確率過程で、ブラウン運動の自然な拡張といえる。乱流モデルやファイナンス理論等に応用をもつ。残念ながらセミマルチンゲールではないので、通常の確率積分はできないので、さまざまな工夫が考えられてきたが、Coutin-Qian (2002)により、ハースト・パラメーターが 1/4 と 1/2 の間にあるときは、ラフパス理論の枠組みに入ることがわかった。特に、ハースト・パラメーターが 1/4 と 1/3 の間にあるときは、3 重積分が議論に登場して、2 重積分までしか使わないブラウン運動の場合と本質的にことなる。

また、微分方程式の係数がそれほどはよくない場合に、どのように工夫してラフパス理論が適用できるのか、という研究もした。方程式の係数が３階微分まで全て有界、というのが T. Lyons の定理の基本形だが、この条件を緩めたい、というのは重要な問題である。

それそのものではなく、多少迂回した議論になってしまうのだが、カットオフとよばれるテクニックを使うと、直接は T. Lyons の定理が適用できなさそうな方程式でも、なんとか扱えることがわかり、大偏差原理などがループ空間上でベゾフ型のノルムに対しても成立することが最近になってわかった。これらは論文にまとめて投稿中であるが、まだ審査中のため、この報告の文献には載せていない。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　3　件）

① Yuzuru Inahama & Hiroshi Kawabi,
On the Laplace-type asymptotics and the stochastic Taylor expansion for It¥^o functionals of Brownian rough paths,
{¥it RIMS Kokyuroku Bessatsu} {¥bf B6} (2008), 139--152
（査読有）

② Yuzuru Inahama & Hiroshi Kawabi,
On asymptotics of　Banach space-valued It¥~{o} functionals of Brownian rough paths,
Stochastic Analysis and Applications--
The Abel symposium 2005,
Stockholm, Springer, 415-434, (2007).
（査読有）

③ Yuzuru Inahama & Hiroshi Kawabi,
Asymptotic expansions for the Laplace approximations for It¥^{o} functionals of Brownian rough paths,
J. Funct. Anal. {¥bf 243} (2007), no. 1, 270--322.
（査読有）

〔学会発表〕（計　4　件）

① 稲浜　譲、 2009 年 3 月 26 日，東京大学
日本数学会　 統計数学分科会 特別講演
``Rough path analysis for an infinite dimensional diffusion''

② Yuzuru Inahama: 2008 年 7 月 31 日,
京都大学 The 1st MSJ-SI (The Mathematical Society of Japan, Seasonal Institute), Probabilistic Approach to Geometry において.
``A stochastic Taylor-like expansion in the rough path theory.''

③ 稲浜　譲、　2007 年 11 月 24 日
東京工業大学「確率解析とその周辺」において.
``A stochastic Taylor-like expansion in the rough path theory.''

④ Yuzuru Inahama: 2007年10月8日
Stochastic calculus on manifolds, graphs, and random structures
at University of Bonn:
``A stochastic Taylor-like expansion in the rough path theory.''

６．研究組織
(1)研究代表者
稲浜　譲　(INAHAMA　YUZURU)
東京工業大学・大学院理工学研究科・助教
研究者番号 80431998

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし