様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21 年 6 月 1 日現在

研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：2007～2008
課題番号：19740067
研究課題名（和文） コロンボの理論を用いた不連続な係数を持つ一階双曲型方程式の研究

研究課題名（英文） Study of first-order hyperbolic equations with discontinuous coefficients using Colombeau’s theory

研究代表者
出口 英生（DEGUCHI HIDEO）
富山大学・大学院理工学研究部（理学）・講師
研究者番号：30432115

研究成果の概要：不連続な係数を持つ一階線形双曲型方程式に対する初期値問題の Colombeau の意味での一般関数解を研究した。このような初期値問題は、一般に一意な超関数解を持たないが、一意な一般関数解を持つ。この一見、不可思議な現象の解明を試みた。
次に、一般関数解の正則性、特異性の伝播を研究した。特に、ある不連続な係数の場合において、初期値の原点における特異性がどのように伝播するかを詳しく考察した。さらに、一般関数解が超関数の情報のレベルでどのように振舞うかを調べた。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合 計
2007 年度	900,000	0	900,000
2008 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
年度			
総 計	1,700,000	240,000	1,940,000

研究分野：偏微分方程式論
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：一階双曲型方程式、一般関数解、正則性、特異性の伝播、一意性

１．研究開始当初の背景

Schwartz と Gel’fand 等によって基礎付けられた超関数の理論は、線形位相空間の理論に基づいた本質的に線形な概念である。この理論は偏微分方程式の研究に多大な貢献をしたが、Lewy によって構成された解を持たない方程式の例からわかるように、滑らかな係数を持つ線形偏微分方程式の研究に対してさえ、十分でない。佐藤の超関数の理論に対しても同様な例が Schapira によって構成されている。さらに、最近の偏微分方程式の研究は、特異性のある係数や初期値を持つ線形偏微分方程式だけでなく非線形偏微分方程式へと重点が移行してきている。非線形偏微分方程式の研究に超関数を用いるためには、超関数の積をはじめとした非線形な作用に関する理論が必要となる。そのような方向の一つとして、Colombeau による一般関数の理論が重要である。Colombeau の一般関数の空間は、超関数の空間を含む微分多元環

であり、部分多元環として滑らかな関数の空間を持つ。さらに、この空間は積だけでなくある非線形作用に関しても閉じているので、特異性のある係数や初期値を持つ非線形偏微分方程式の解を見つけ研究するために、非常に便利な空間である。

国内外における当該研究の位置づけについては、フランスでは、Colombeau 等によって、非保存則の不連続な一般関数解の研究が行なわれている：

・Discontinuous generalized solutions of nonlinear nonconservative hyperbolic equations, J. J. Cauret, J. F. Colombeau and A. Y. LeRoux, Journal of Mathematical Analysis and Applications 139 (1989) 552-573.

セルビア・モンテネグロでは、ノービサード大学において Pilipović を中心に、精力的に線形偏微分方程式の一般関数解の研究が行なわれている：

・ The linear theory of Colombeau generalized functions, M. Nedeljkov, S. Pilipović and D. Scarpalézos, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 385, Longman, Harlow, 1998.

オーストリアでは、ヴィエナ大学とインスブルック大学のメンバーを中心に構成される DIANA グループにおいて、偏微分方程式の一般関数解の研究が盛んである。例えば、一般関数解の正則性に関しては、Hörmann と de Hoop による超関数解を持たない一階線形双曲型方程式の研究や Oberguggenberger による半線形波動方程式の研究等がある：

・Microlocal analysis and global solutions of some hyperbolic equations with discontinuous coefficients, G. Hörmann and M. V. de Hoop, Acta Applicandae Mathematicae 67 (2001) 173-224,

・Regularity theory in Colombeau algebras, M. Oberguggenberger, Bulletin, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, Sciences Mathématiques, no.31 (2006) 147-162.

しかしながら、滑らかでない係数を持つ線形偏微分方程式、さらには非線形偏微分方程式に対する理論的な正則性に関する結果はほとんどない。また、日本では、特異性のある係数や初期値を持つ非線形偏微分方程式を、Colombeau の一般関数の理論を用いて研究している数学者の数はあまり多くはない。

２．研究の目的

本研究の目的は、Colombeau の一般関数の理論を用いて、不連続な係数を持つ一階双曲型方程式に対する初期値問題の一般関数解の存在性、一意性、正則性、超関数解との関係を研究することである。主目的は、一般関数解の正則性、特異性の伝播、一意でない超関数解との関係を調べることである。

３．研究の方法

Colombeau の一般関数の空間 G は、超関数の空間 D’を含む微分多元環であり、部分多元環として滑らかな関数の空間 C^∞ を持つ。さらに、次の事実から見られるように、空間 G は空間 D’より良い構造を持つ。一般に空間 D’において積を定義することはできないが、空間 D’のあるクラスに対しては、滑らかな関数との合成積による近似を用いて積を定義することは可能である。この意味で、空間 D’においてヘビサイド関数のべき乗は全て一致する。しかし空間 G においては一致しない。これは、空間 G において、通常空間 D’においては含まれない多くの情報を伝えることができるということを意味する。超関数の意味での積との一致を見るためには、一般関数の情報を超関数の情報のレベルに落とす必要がある。これは、「association」と呼ばれる概念によって実行される。実際に、空間 G において、ヘビサイド関数のべき乗は全て異なるが、association の意味では全て一致する。また、空間 G は、積だけでなくある滑らかな非線形作用に関しても閉じているので、特異性のある係数や初期値を持つ非線形偏微分方程式の解を見つけ研究するために、非常に便利な空間である。

(1) 不連続な係数を持つ一階双曲型方程式の研究に Colombeau の一般関数の理論を用いる。不連続な係数のため、この方程式において超関数の積が現れる。よって、一般に、超関数の空間の枠組みにおいてこの方程式に意味を与えることはできない。さらに、たとえこの方程式が線形かつ保存則の形で表せたとしても、一般に超関数解は存在しないことが Hurd と Sattinger によって証明されている：

・Questions of existence and uniqueness for hyperbolic equations with discontinuous coefficients, A. E. Hurd and D. H. Sattinger, Transactions of the American Mathematical Society 132 (1968) 159-174.

他方、Colombeau の一般関数の空間は、超関数の空間を含む微分多元環であり、積だけでなくある非線形作用に関しても閉じている。従って、たとえ係数が Colombeau の一般関数であったとしても、この方程式の解の概念は Colombeau の一般関数の空間の枠組みにおいて意味を成す。これが、不連続な係数を持つ一階双曲型方程式の研究に Colombeau の一般関数の理論を用いる理由である。

(2) Colombeau の一般関数解の正則性の研究は、現在、活発な研究領域の一つである。滑らかな関数の空間 C^∞ は、超関数の空間にお

ける解の正則性の研究とは異なり、Colombeau の一般関数解の正則性の研究には適さない。このため、Oberguggenberger によって空間 G の部分多元環 G^∞ が導入された。この空間 G^∞ は $G^\infty \cap D' = C^\infty$ を満たすので、一般関数の正則性を述べる目的で、空間 G^∞ は超関数の枠組みにおいて空間 C^∞ が果たすのと同じ役割を果たす。今までに、様々な線形偏微分方程式に対して、空間 G^∞ を用いた正則性に関する結果が得られてきている。しかしながら、不連続な係数を持つ一階線形双曲型方程式に対する初期値問題の一般関数解の正則性の問題は、Hörmann と de Hoop、Garetto と Hörmann による特殊な場合を除いて、未解決である：

・Microlocal analysis and global solutions of some hyperbolic equations with discontinuous coefficients, G. Hörmann and M. V. de Hoop, Acta Applicandae Mathematicae 67 (2001) 173-224,

・Microlocal analysis of generalized functions: pseudodifferential techniques and propagation of singularities, C. Garetto and G. Hörmann, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. Series II 48 (2005) 603-629.

空間 G^∞ を用いて、この初期値問題の一般関数解の正則性、特異性の伝播を研究する。

空間 G^∞ は非線形偏微分方程式の一般関数解の正則性の研究には適さない。実際に、空間 G^∞ は多元環ではあるが、一般の滑らかな非線形作用に関して閉じていない。従って、非線形偏微分方程式の一般関数解の正則性を研究するためには、空間 G^∞ に代わる新しい空間が必要となる。しかしながら今のところ、非線形偏微分方程式の一般関数解の正則性の研究に有効な空間はまだ導入されておらず、非線形偏微分方程式に対する理論的な正則性に関する結果はほとんどない。このため、本研究では、Colombeau の一般関数の空間 G^∞ の部分多元環 G^0 を導入する。この空間 G^0 は、$G^0 \cap D' = C^\infty$ を満たし、全ての滑らかな非線形作用に関して閉じている。従って、空間 G^0 は非線形偏微分方程式の一般関数解の正則性の研究に対して有効であると期待できる。実際に、空間 G^0 が半線形波動方程式の一般関数解の正則性の研究に適していることが Oberguggenberger によって証明されている：

・Regularity theory in Colombeau algebras, M. Oberguggenberger, Bulletin, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, Sciences Mathématiques, no.31 (2006) 147-162.

この空間 G^0 を用いて、不連続な係数を持つ一階非線形双曲型方程式に対する初期値問題の一般関数解の正則性、特異性の伝播を研究する。

(3) 一般関数解と超関数解の関係を調べるためには、一般関数解の情報を超関数の情報のレベルに落とす必要がある。これは、「association」と呼ばれる概念によって実行される。一意な超関数解が存在する場合、非一意な超関数解が存在する場合、超関数解が存在しない場合、一般関数解は超関数の情報のレベルでどのように振舞うのかを調べる。

４．研究成果

不連続な係数を持つ一階双曲型方程式に対する初期値問題の Colombeau の意味での一般関数解を研究した。不連続な係数のため、この方程式において超関数の積が現れる。よって、一般に、超関数の空間の枠組みにおいてこの方程式に意味を与えることはできない。他方、Colombeau の一般関数の空間は、超関数の空間を含む微分多元環であり、積だけでなくある非線形作用に関しても閉じている。従って、たとえ係数が Colombeau の一般関数であったとしても、この方程式の解の概念は Colombeau の一般関数の空間の枠組みにおいて意味を成す。これが、不連続な係数を持つ一階双曲型方程式の研究に Colombeau の一般関数の理論を用いる理由である。

方程式が線形かつ保存則の形で表せる場合、たとえ超関数解が存在したとしても、一般に解は一意ではないことが Hurd と Sattinger によって示されている：

・Questions of existence and uniqueness for hyperbolic equations with discontinuous coefficients, A. E. Hurd and D. H. Sattinger, Transactions of the American Mathematical Society 132 (1968) 159-174.

他方、このような方程式は一意な一般関数解を持つことが Oberguggenberger によって証明されている：

・Hyperbolic systems with discontinuous coefficients: generalized solutions and a transmission problem in acoustics, M. Oberguggenberger, Journal of Mathematical Analysis and Applications 142 (1989) 452-467.

この一見、不可思議な現象の解明を試み、ある係数と初期値の場合において次のような結果を得た：任意の超関数解に対して、それに associate する一般関数解が存在する。これは、Colombeau の一般関数の空間において、全ての超関数解を、それぞれ異なる初期値を満たす一般関数解とみなすことができるということを意味する。この意味で、超関数の枠組みで異なる複数の解を持つ方程式は一般関数の枠組みでは一意な解を持つということが分かった。

今までに様々な方程式の古典（超関数）解

と一般関数解の関係が研究されてきたが、一意な古典（超関数）解が存在する方程式の場合がほとんどであった。よって、本研究のように、一意な一般関数解と一意でない超関数解の間にどのような関係があるのか？という新しい視点での研究は、今後重要になるものと期待される。

次に、Colombeau の一般関数の空間のある部分多元環 G^0 を導入し、この部分多元環を用いて一般関数解の正則性、特異性の伝播を研究した。特に、ある不連続な係数の場合において、初期値の原点における特異性がどのように伝播するかを詳しく考察した。さらに、一般関数解が associate する超関数の具体的な形を求めた、すなわち、一般関数解が超関数の情報のレベルでどのように振舞うかを調べた。

Colombeau の一般関数の空間の部分多元環 G^0 は、$G^0 \cap D' = C^\infty$ を満たし、全ての滑らかな非線形作用に関して閉じている。従って、空間 G^0 は非線形偏微分方程式の一般関数解の正則性の研究に対して有効であると期待できる。実際に、空間 G^0 が半線形波動方程式の一般関数解の正則性の研究に適していることが Oberguggenberger によって証明されている：

・Regularity theory in Colombeau algebras, M. Oberguggenberger, Bulletin, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, Sciences Mathématiques, no.31 (2006) 147-162.

よって、空間 G^0 を用いた非線形偏微分方程式の一般関数解の正則性の研究は、今後重要になるものと期待される。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

Hideo Deguchi, Existence, uniqueness and stability of weak solutions of parabolic systems with discontinuous nonlinearities, Monatshefte für Mathematik 156 (2009) 211-231.（査読有）

〔学会発表〕（計１件）

Hideo Deguchi, Weak solutions of a parabolic system with a discontinuous nonlinearity, The 5th World Congress of Nonlinear Analysts WCNA-2008, Hyatt Grand Cypress Resort, Orlando, Florida USA, July 7, 2008

〔その他〕

６．研究組織

(1)研究代表者

出口　英生（Deguchi Hideo）

富山大学・大学院理工学研究部（理学）・講師

研究者番号：30432115

(2)研究分担者

(3)連携研究者