様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　22 年　5 月　1 日現在

研究種目：　若手研究(B)
研究期間：　2007　～　2009
課題番号：　19740070
研究課題名（和文）　等質ケーラー多様体上の調和解析
研究課題名（英文）　Harmonic analysis on homogeneous Kaehler manifolds

研究代表者
伊師　英之（HIDEYUKI ISHI）
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授
研究者番号：00326068

研究成果の概要（和文）：等質錐と有界等質領域について新たな研究手法を開発し，それを用いて未解決問題の解決を含むいくつかの結果を得た.結果・手法とも等質ケーラー多様体の幾何と解析の一般論の礎となるべきものである.本研究の副産物として,正則凸錐上のウィシャート分布という数理統計における興味深い概念を考案した.

研究成果の概要（英文）：We develop some new methods for the study of homogeneous cones and homogeneous bounded domains. Taking advantage of our methods, we obtain several results including an answer to an open problem. Both the methods and the results should be of substantial importance in the general theory of homogeneous Kaehler manifolds. As a bi-product of the present project, we introduce an interesting notion of 'Wishart distributions on regular convex cones' in mathematical statistics.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	600,000	0	600,000
2008 年度	600,000	180,000	780,000
2009 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総　計	1,800,000	360,000	2,160,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学　・　基礎解析学
キーワード：
ケーラー多様体，ユニタリ表現，幾何学的量子化，有界等質領域，等質錐，ウィシャート分布

１．研究開始当初の背景　　シンプレクティック多様体の量子化の結果として空間の対称性に対応するリー群のユニタリ表現が得られることは古くから認識されていた. たとえば旗多様体の幾何学的量子化からコンパクトリー群のボレル・ヴェイユ構成が，有界対称領域の量子化からはエルミートリー群の正則離散系列表現が得られることはよく知られている.これら二つの空間はどちらもケーラー多様体であり，リー群が推移的に作用する等質空間である.等質ケーラー多様体については Dorfmeister と中島和文によって次の基本定理が証明さ

れている:任意の等質ケーラー多様体は,有界等質領域を底空間とし,平坦なケーラー多様体と旗多様体の直積をファイバーとする正則ファイバー束の構造をもつ。

有界等質領域,平坦なケーラー多様体,旗多様体のそれぞれに複素解析的誘導表現を付随させることで重要なユニタリ表現が幾何学的に実現されることが知られている.しかし基本定理をふまえて一般の等質ケーラー多様体から得られるユニタリ表現を論じるような研究は殆ど無いようである.実際,基本定理以後は一般の等質ケーラー多様体上の幾何と調和解析にあまり大きな進展は見られない.その理由の一つは,対称性として現れるリー群が簡約型とは限らず,そのため表現論や対称空間論の重要なテクニックのうちの幾つかが適用できないためと思われる.とくに対称でない有界等質領域についてはハリシュチャンドラ実現のような標準的な有界実現が知られていないことが大きな困難であった.

2．研究の目的　一般の等質ケーラー多様体の幾何学的量子化として得られるヒルベルト空間と,その上に実現される群のユニタリ表現を,多様体の幾何学と関連させて考察することが本研究の目的である.ヒルベルト空間とその再生核を具体的に構成し,ユニタリ表現を分類することを目指す.そのための道具として有界等質領域の幾何と解析を整備することも必要になるであろう.

3．研究の方法　我々が本研究に用いた主要な独自の道具は等質ジーゲル領域の同変埋め込みと有界等質領域の代表領域実現である.それぞれについて以下に説明する.(1) 任意の等質ジーゲル領域は,対称領域であるジーゲル上半平面に可解リー群の作用に関して同変に埋め込めるうえ,その埋め込みの像は特別なブロック分解を持つ行列の集合として記述される.この結果はそれ自身の興味だけでなく,等質領域の具体例を構成するのにも大変有用である.さらに,行列の集合として実現された領域上では行列式やトレース,逆行列のような通常の線型代数の道具が利用できるので,従来のジーゲル領域の幾何と解析の一般論は格段に見通しのよいものに再構築できる.作用するリー群が実シンプレクティック群の部分群として実現されることも,調和解析の観点から様々は応用が考えられる.この埋め込みが領域の正則同型群全体の作用に関しても同変となるならば,コンパクトな固定部分群が行列実現の枠組みで扱えることになり,その意義はきわめて大きい.しかしながら２つの例外型有界対称領域についてはそのような同変埋め込みが不可能であることが佐武一郎によって証明されている.それ以外の有界等質領域についての同変埋め込みの存在は Vinberg と Rothaus の研究が肯定的に示唆しているように見えるが,きちんとした検証は未だ成功していない.(2)リーマンの写像定理は,複素平面に真に含まれる単連結領域の中で単位円板が標準的な実現であるとも解釈できる.Bergman は高次元の複素領域について類似の標準的な実現を定義することを目指し,彼自身が導入したベルグマン核を用いて代表領域なる概念を考案した.一般の複素領域については必ずしも代表領域が定義できるとは限らないが,有界等質領域の場合は本質的に唯一の有界な代表領域実現を持つことが Xu によって示された.しかしこの結果は,潜在的な重要性にも関わらず,証明が非常に複雑な計算に依ることもあって殆ど注目されなかった.詳しくは研究成果として後述するが,我々は等質ジーゲル領域のケイリー変換像が代表領域と一致することを示すことで Xu の結果の別証明を与え,幾多の著しい性質(たとえば原点での固定部分群はユニタリ群に含まれる)のゆえに代表領域実現がハリシュチャンドラ実現の一般化とみなすに価するとの認識に至った.したがって有界等質代表領域は一般の等質ケーラー多様体の研究においても重要な役割を演じるはずである.Bergman の研究に触発されて,ケーラー多様体の標準座標なる概念が Bochner によって導入された(ベルグマン計量の標準座標系の像が代表領域である).等質ジーゲル領域上には等質ケーラー計量のパラメータ族が存在するが,それらに対応する標準座標は野村隆昭が導入したケイリー変換のパラメータ族と一致するのではないかと予想される.もし予想が正しいのなら,等質ケーラー多様体としての有界等質領域の性質がどのようにケイリー像の幾何に反映するかを調べることは興味深い問題になるであろう.

4．研究成果　(1) ジーゲル円板を底空間とし,複素ベクトル空間をファイバーとする等質ケーラー多様体について,幾何学的量子化として現れる再生核ヒルベルト空間を完全に決定した.その

ヒルベルト空間に実現されるヤコビ群のユニタリ表現は実シンプレクティック群の正則離散系列表現の解析接続の制限として得られる．(2) 有界等質領域の代表領域実現が，Penney や野村隆昭によって研究された等質ジーゲル領域のケイリー変換像に一致することを示した．これは金沢大学の甲斐千舟との共同研究である．さらに甲斐の以前の結果と合わせることにより，有界等質代表領域が凸領域である必要十分条件は領域が対称であることが分かった．これは「凸な有界等質領域は対称か」という従来の予想に肯定的な示唆を与えるものと解釈できる．(3) 有界等質代表領域のベルグマン核と領域の他の実現でのベルグマン核の大変有用で美しい関係式を得た．これを用いて有界等質代表領域のベルグマン核について Hua の積分公式の一般化を得た．さらに行列実現の方法と組み合わせることによりベルグマン距離に関するベルグマン核の挙動の評価を得ることに成功した．これは院生の山路哲史，山盛厚伺との共同研究である．(4) 有界等質領域の任意の点での固定部分群の次元が１以上であることを示した．これは「固定部分群が丁度２個の元からなる有界等質領域は存在するか」という Hundemer の問題に否定的な解答を与えるものである．実際の証明では有界等質領域より広いクラスの複素領域について，その第３種ジーゲル領域としての実現を考えることにより固定部分群の１パラメータ部分群を明示的に構成している．この１パラメータ部分群の函数空間への作用（表現）を考察することは調和解析において重要であろう．(5) 行列実現の方法を拡張して，コンパクト正規左対称代数やＴ代数を行列を用いて記述する方法（一種の行列表現）を考案した．これは既存の理論の統一という観点からも望ましい結果であるし，後述の等質錐およびその上のウィシャート分布の研究においても（あからさまには現れないが）重要な役割を演じている．(6) 等質錐に付随する相対不変多項式は対称行列の（小）行列式の一般化とみなすことができ，それらは等質ジーゲル領域上の調和解析において主要な道具となっている．我々は対称行列の小行列式についての或る簡単な事実の一般化が対称錐では成り立つ一方，殆どの等質錐では成り立たず，しかしそれを成り立たせるような非対称等質錐が希に存在することを示した．また，双対錐と線型同値だが対称ではない単純等質錐の例を具体的に構成した．これら対称錐と近い性質を持つ非対称等質錐上の調和解析の研究は今後の興味深い課題である．これは九州大学の野村隆昭との共同研究である．(7) ウィシャート分布はカイ２乗分布の多次元化として正定値実対称行列のなす対称錐上で定義された分布であり，その理論はジョルダン代数を用いて一般の対称錐の上に拡張されている．その結果をさらに等質錐に拡張しようという試みがこれまで幾つかなされてきた．Angers 大学の P. Graczyk との共同研究により， 我々は正則凸錐に値をとる二次形式に付随するウィシャート分布という自然な定義に到達した．さらに，その二次形式が十分大きな線型群の作用に関して同変性を持つ場合は，リース超函数に関する以前の結果を応用してウィシャート分布の台と密度関数を完全に明示的に記述できることが出来た．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

1. Hideyuki Ishi and Chifune KAI, "The representative domain of a homogeneous bounded domain", Kyushu J. Math., 64 (2010), 35--47, 査読有
2. Hideyuki Ishi, "A torus subgroup of the isotropy group of a bounded homogeneous domain", Manuscripta Math., 130 (2009), 353--358, 査読有
3. Hideyuki Ishi and Takaaki Nomura, "An irreducible homogeneous non-selfdual cone of arbitrary rank linearly isomorphic to the dual cone", Proceedings of the Fourth German-Japanese symposium "Infintite Dimensional Harmonic Analysis IV", 2009, 129—134, 査読有
4. Hideyuki Ishi and Takaaki Nomura, "Tube domain and an orbit of a complex triangular group", Math. Z., 259 (2008), 697--711, 査読有

〔学会発表〕（計２件）

1. 等質錐の閉包の軌道構造について，日本数学会秋期総合分科会，2009.9.24--27, 豊中市（大阪大学）
2. ある可解リー群の複素解析的誘導表現のユニタリ化可能性について，日本数学会年会，2008.3.22--26, 東大阪市（近畿大

学)

〔図書〕（計　件）
〔産業財産権〕
○出願状況（計　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計◇件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
伊師　英之（HIDEYUKI ISHI）
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授
研究者番号：00326068