

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2007～2010

課題番号：19740078

研究課題名（和文） 複素領域における特異1階偏微分方程式に対するジュブレイ理論

研究課題名（英文） Gevrey theory for singular first-order partial differential equations in complex domains

研究代表者

日比野 正樹 (HIBINO MASAKI)

岡山理科大学・工学部・准教授

研究者番号：10441461

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式論、複素解析、発散級数、総和可能性、解析接続、関数空間論、縮小写像

1. 研究計画の概要

(1) 2変数冪零型と呼ばれる1階線型の偏微分方程式において、その発散冪級数解がボレル総和可能となるために方程式の係数が満たすべき条件は何か、という問題を、これまでは完全に一般的とは言えない（方程式の形に幾つかの制限が付いた）方程式に対して研究をしてきました。この制限を外し、最も一般的な冪零型方程式を取り扱い、その発散解のボレル総和可能性を保証するための条件を求めることが、2007年度、2008年度の研究目的です。

(2) 一般に複素解析的の微分方程式において、その特異点を中心とした形式的冪級数解（以下、「形式解」と略記）を考えたとき、一般には方程式の特異性のためにその存在は保証されません。また、存在する場合であっても、その一意性や収束性等は無条件には保証されません。これまで、(i) 形式解が一意存在する為の条件を求める；(ii) さらにその形式解が収束するための条件を求める；

(iii) 形式解が発散する場合にはその発散の大きさを求める；という3つの視点から、或る程度非線型度に条件を課した単独1階偏微分方程式に対して研究を続けてきました。

（このような問題は「マイエ型」の問題と呼ばれている。）同じ視点からの研究を、非線型度に条件を全く課さない一般の単独1階偏微分方程式に対して行い、過去の研究の一般化となる形で解答を与えることが、2009年度以降の研究目的です。

2. 研究の進捗状況

(1) ボレル総和可能性の問題に関しては、完全に一般的な冪零型方程式を扱うまでには至りませんでした。過去の研究に比べて相当に一般性の高い方程式に対して、「発散解のボレル総和可能性は、方程式の係数に対する“或る種の”解析接続可能性と、その偏導関数に対する“或る種の”増大（または減少）度によって保証される」という結果の証明に成功しました。

上の“或る種の”と書かれた部分を実際に具体的な形で書き表すことが出来たことが最も重要な研究成果です。これを可能にするためには、「方程式に形式的ボレル変換と呼ばれる変換を施して得られる或る1階線型偏微分方程式に対して、その特性曲線の具体的表示を得る」ことが必要であり、方程式の一般性を幾分犠牲にすることにより、それが可能となりました。

(2) マイエ型の問題に関しては、現在、研究の途中段階です。研究対象の方程式は、その線型主要部のなすベクトル場のヤコビ行列の固有値の値に応じてタイプが分かれますが、2009年度は、どの固有値も零でないタイプを扱いました。そして「固有値が“ポアンカレ条件”、“非共鳴条件”と呼ばれる2つの条件を満たし、さらに方程式の係数の零点の位数が或る程度高ければ、形式解が一意に存在し、さらにその形式解は収束する」という結果の証明に成功しました。

結果の証明は、収束冪級数のなす空間に、或るノルムを導入してバナッハ空間を作り、

縮小写像の原理を用いて行いました。この方法は、過去にも線型方程式等に対する同様の研究において、研究代表者により採用されてきたものですが、非線型方程式を扱う際、過去に使用していたノルムが証明に適さず、新ノルムを探す必要に迫られました。この新しいノルムを見つけられたことは、重要な研究成果の1つです。

3. 現在までの達成度

③やや遅れている。

(理由)

ポレル総和可能性の問題に関しては、当初の目標であった完全に一般的な冪零型方程式に対する問題の解決には至っていません。「2. 研究の進捗状況」の項で述べた通り、問題解決のためには、或る1階線型偏微分方程式の特性曲線の具体的表示を得ることが不可欠なのですが、方程式の一般性が高くなればなるほど、特性曲線の「具体的」表示を得ることが困難になってきます。

マイエ型の問題に関しては、「2. 研究の進捗状況」の項で述べたヤコビ行列の固有値が全て零の場合も、2009年度中に取り扱う予定でしたが、急激な雑務の増加で研究時間が取れず、断念せざるを得ませんでした。

4. 今後の研究の推進方策

2009年度より、研究代表者の校務の増加のため、当初予定していたほどの研究時間を確保出来なくなり、計画通りに研究を進めていくのは困難な状況です。しかしながら、研究期間も残り1年であり、研究計画を変更したとしても、短期間で成果を上げられる見込みは無いため、計画の変更は行わず、これまで通り研究を進めていきます。

具体的な研究内容についてですが、マイエ型の問題に関して、2009年度中に行う予定であった、ヤコビ行列の固有値が全て零のタイプの方程式（「3. 現在までの達成度」の項を参照）の研究に取りかかります。

このタイプの方程式は“ポアンカレ条件”を満たしませんが、“非共鳴条件”と、方程式の係数の零点の位数に対して或る程度の高さを課すことにより、形式解の一意存在は保証されると予想しておりますので、まずはその予想の証明を試みます。

次に、形式解の収束・発散についてですが、過去の線型方程式等に対する研究により、一般にこのタイプの方程式の形式解は発散することが分かっております。そこで、その発散の大きさを表す“ジブレイ度”を、過去の研究を参考にしながら予想し、その後、その予想の証明を試みます。

証明方法としては、これまで同様、縮小写像の原理を用いた方法を採用する予定です。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計1件)

- ① 著者名：Masaki HIBINO
論文標題：Summability of formal solutions for singular first-order linear PDEs with holomorphic coefficients
雑誌名：RIMS Kokyuroku Bessatsu
査読の有無：査読有り
巻：10
発行年(西暦)：2008年
ページ：47～62

[学会発表] (計6件)

- ① 発表者名：日比野 正樹
発表標題：特異1階偏微分方程式に対する形式的冪級数解の収束について…三宅・白井の定理の不動点定理による証明…
学会等名：2010日本数学会年会
発表年月日：2010年3月24日
発表場所：慶応義塾大学
- ② 発表者名：日比野 正樹
発表標題：Convergence of formal solutions for singular first-order non-linear PDEs --- Proof of Miyake-Shirai's theorem by the fixed point theorem ---
学会等名：第2回 名古屋微分方程式研究集会
発表年月日：2010年3月17日
発表場所：名古屋大学
- ③ 発表者名：日比野 正樹
発表標題：Summability of formal solutions for singular first-order linear PDEs with holomorphic coefficients II
学会等名：Microlocal analysis and Related Topics
発表年月日：2009年10月19日
発表場所：関西学院大学
- ④ 発表者名：日比野 正樹
発表標題：Summability of divergent solutions for singular first order linear PDEs with holomorphic coefficients
学会等名：Holomorphic partial differential equations, small divisors and summability
発表年月日：2008年1月31日
発表場所：フランス・CIRM