

平成21年 5月27日現在

研究種目：若手研究 (B)
 研究期間：2007 ～ 2008
 課題番号：19740080
 研究課題名 (和文) エネルギー汎函数の勾配に支配される曲線および曲面のダイナミクス
 研究課題名 (英文) The dynamics of curves and surfaces governed by gradient of energy functionals

研究代表者
 岡部 真也 (OKABE SHINYA)
 岩手大学・人文社会科学部・准教授
 研究者番号：70435973

研究成果の概要：当該研究期間において、適当なエネルギー汎函数の勾配に支配される曲線および曲面のダイナミクスについて研究を行った。その結果、次のような成果を得た：(1)一様に強い圧力を受ける弾性閉曲線のダイナミクスについて、圧力が非常に大きい場合に、各平衡点の安定性および不安定性を明らかにすることで、その近傍でのダイナミクスを解明した；(2)閉曲線上で定義されるある action 汎函数に対する変分問題に対して、ある動径対称な臨界点の近傍に非動径対称な臨界点が一意に存在することを証明した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,200,000	0	1,200,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,200,000	300,000	2,500,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：変分法

1. 研究開始当初の背景

代表者は、ピアノ線のような弾性体でできた閉曲線がある束縛条件をみたしつつ、最も効率よく曲げエネルギーを減らすように変形していく運動の過程について研究を行っていた。多くの物理現象は、適当なエネルギー汎函数を最も減らす方向に運動する過程としてとらえることができる。これは(安定な)定常状態を求める問題と言える。曲線に対する変分問題としては *elastica* がよく知られ

ており、その研究は *Euler* まで遡ることができる。しかし一方で、そのダイナミクスについては精密な研究例が豊富とは言えない。その理由としては、系が一つ、または複数の束縛条件をみたしながらエネルギーを減らす方向に運動する場合には数学的取扱いが複雑になる、ということが挙げられる。このような背景のもと、ダイナミクスに関する精密な研究例を構築すべく、研究を開始した。

2. 研究の目的

本研究の目的は、上記した動機に従って、次の二つの主題に関する曲線または曲面のダイナミクスを解明することである：

【主題1】ある束縛条件に従う弾性閉曲線のダイナミクス

【主題2】action minimization に関連した変分問題

主題1においては、具体的には次のような物理的状況を記述する数理モデルについて研究を行った：

【問題A】平面内の弾性体でできた閉曲線を考える。この閉曲線が囲む領域の内側とその外側からそれぞれ一様な圧力がかかっている状況を考える。外圧のほうが内圧より大きいとき、その圧力差が小さければ円が安定である。しかし、圧力差がある臨界値を超えたとき、座屈が生じ円でない形状が現れる。このとき、閉曲線のダイナミクスはどのようなものか？

主題2では次の変分問題を考察した：

【問題B】閉曲線の曲率と法方向への変形速度をそれぞれ2乗し、曲線および時間に関して積分することで定義される時空汎関数を考える。このとき、初期と終期の形状が与えられた閉曲線族の中で、この汎関数を最小化するものはどのようなものか？

3. 研究の方法

(1) 問題Aについては、① 曲線の運動を記述する発展方程式を導出し、その時間大域的挙動を解析する、② 曲線の定常状態を与える変分問題の臨界点の性質を明らかにする、という2つの解析的手法を合わせることにより、各臨界点の近傍での曲線のダイナミクスについて解析を行った。①では、曲線の運動を記述する4階放物型偏微分方程式の初期値問題の解の挙動を解析した。この初期値問題が時間大域的に解をもち、その解が時間を無限大とするとき収束することを証明すれば、曲線が束縛条件をみたしつつエネルギー汎関数を最も効率よく減らしながら変形し、最終的に何らかの定常状態に近づくことを証明することができる。一方、②では、臨界点の安定性・不安定性を明らかにするために、エネルギー汎関数の第2変分について解析を行った。各臨界点の第2変分の符号を判定することにより、その臨界点の安定性・不安定性を決定することができる。このような臨界点の性質が従えば、①で得た結果を合

わせることによって、各臨界点の近傍での曲線のダイナミクスを解明することができる。

(2) 問題Bについては、初期と終期の形状を予め与えているため、この変分問題のEuler-Lagrange方程式として導出される偏微分方程式に対する初期値終期値問題を解析することとなる。この問題における困難は①初期値終期値問題という、これまでに研究成果の少ない問題の、解析手法を構築せねばならない、②Euler-Lagrange方程式として得られる偏微分方程式は発展方程式としては不適切（この方程式に対する初期値問題は一般に解くことができない）なタイプである、という2点が挙げられる。これらの問題点を解明すべく、解析方法を模索した。

4. 研究成果

【問題Aについて】この問題に関しては、以下の結果を得た：①曲線の運動を記述する発展方程式に対する初期値問題は、時間大域的に解をもち、さらに時間を無限大とするときその解はある定常解に収束する。②曲線の定常状態を決定する変分問題の臨界点について、圧力差が非常に大きい場合に、すべての臨界点の安定性・不安定性を決定した。そして、①と②を合わせることにより、各臨界点の近傍での曲線のダイナミクスを決定した。本結果は、束縛条件に従う曲線のダイナミクスを解明した稀な例であるといえる。しかしあくまで臨界点の近傍におけるダイナミクスを解明したに過ぎない。今後の研究の方向性としては、無限次元力学系という観点からの解析などを用いて、完全なるダイナミクスの解明に挑む。さらに、圧力差が一般の場合への拡張も興味深い。

【問題Bについて】この問題に関しては、以下の結果を得た：①問題を動径対称な場合（閉曲線族がすべて円から構成される場合）に、最小解をすべて求め、任意の初期終期データ（今は初期と終期の円の半径）についてそれらを分類した。②①で得られた最小解のなかで、平均曲率流方程式から決定されるもの（以下、Hと表す）の近傍において、非動径対称な臨界点が一意に存在することを証明した。本結果は、初期値終期値問題というこれまで研究結果の少ない問題の解法を提示したという観点でも意義深いものである。また、②で扱った偏微分方程式は、発展方程式として見た場合には不適切な（初期値問題としては解くことができない）型である。こ

れは本研究における困難の一つであったが、本結果により、初期値終期値問題としてのその解法が与えられた。ゆえに、今後、同様の問題を解析する際の指針となる結果であると位置づけることができる。問題Bの今後の研究方針を最後に記す。ひとつの方向性としては②で得られた臨界点が一般の最小解であることを証明することである。また、今回の結果は円と円をつなぐ動径対称な最小解の近傍を解析したものであるから、より一般の場合に非動径対称な臨界点の存在を示すことも興味深い研究である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

- ① 岡部真也, The dynamics of elastic closed curves under uniform high pressure, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* (2008), 33, 493–521, 査読有.
- ② 岡部真也, The motion of elastic planar closed curves under the area preserving condition, *Indiana Univ. Math. J.* (2007), 56, No 4, 1871–1912, 査読有.
- ③ 岡部真也, Asymptotic form of solutions of the Tadjbakhsh-Odeh variational problem, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, (2007), 47, No 2, Asymptotic Analysis and Singularities –Elliptic and Parabolic PDFs and related topics, 709–728, 査読有.

[学会発表] (計17件)

- ① 岡部真也, The variational problem for a certain action functional defined on closed curves, *Mathematical Science and Nonlinear Partial Differential Equations*, 2009. 2. 14, 大阪・大阪大学.
- ② 岡部真也, The variational problem for a certain action functional defined on closed curves, 福島応用数学小研究集会, 2009. 2. 7, 福島・福島大学サテライト教室.

- ③ 岡部真也, The variational problem for a certain action functional defined on closed curves, 曲線と曲面の非線形解析, 2008. 12. 18, 大宮・大宮ソニックシティカレッジ._
- ④ 岡部真也, 閉曲線上で定義されたある action 汎関数に対する変分問題, 2008年度日本数学会秋季総合分科会, 2008. 9. 25, 東京・東京工業大学._
- ⑤ 岡部真也, The variational problem for a certain action functional defined on closed curves, 第4回非線型の諸問題, 2008. 9. 22, 佐賀・佐賀大学.
- ⑥ 岡部真也, The variational problem for a certain action functional defined on closed curves, The 33rd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 2008. 8. 27, 札幌・北海道大学.
- ⑦ 岡部真也, The variational problem for a certain action functional defined on closed curves, 室蘭工業大学談話会, 2008. 7. 14, 室蘭・室蘭工業大学.
- ⑧ 岡部真也, The variational problem for a certain action functional defined on closed curves, 熊本大学応用解析セミナー, 2008. 5. 10, 熊本・熊本大学.
- ⑨ 岡部真也, The dynamical aspects of elastic closed curves under uniform high pressure, 第70回神楽坂解析セミナー, 2008. 4. 26, 東京・東京理科大学.
- ⑩ 岡部真也, The dynamics of elastic closed curves under uniform high pressure, 第7回偏微分方程式ワークショップ, 2008. 3. 14, 鹿児島.
- ⑪ 岡部真也, The dynamical aspects of elastic closed curves under uniform high pressure, The 9th Northeastern Symposium on Mathematical Analysis, 2008. 2. 21, 札幌・北海道大学._
- ⑫ 岡部真也, The dynamics of elastic closed curves under uniform high pressure, 変分問題セミナー, 2008. 1. 18, 東京・首都大学東京.
- ⑬ 岡部真也, The stability and instability of elastic closed curves under uniform high pressure, 第5回浜松偏微分方程式研究集会, 2007. 12. 18, 浜松・静岡大学.
- ⑭ 岡部真也, The structure of solutions of Tadjbakhsh-Odeh variational problem with large pressure term, *Asia*

PDE mini-workshop at Sendai, 2007. 9. 13, 仙台・東北大学.

- ⑮ 岡部真也, あるエネルギー汎函数の勾配に支配される曲線のダイナミクス, 東北大学数学教室談話会, 2007. 6. 4, 仙台・東北大学.
- ⑯ 岡部真也, The dynamics of elastic closed curves under uniform high pressure, 九州函数方程式セミナー, 2007. 5. 25, 福岡・九州大学.
- ⑰ 岡部真也, 一様に強い圧力を受ける平面弾性閉曲線のダイナミクス, 月曜解析セミナー, 2007. 5. 21, 仙台・東北大学.

〔図書〕 (計 0 件)

〔産業財産権〕

- 出願状況 (計 0 件)
- 取得状況 (計 0 件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岡部真也 (OKABE SHINYA)
岩手大学・人文社会科学部・准教授
研究者番号 : 70435973