

機関番号：12614

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2007 ~ 2010

課題番号：19740084

研究課題名 (和文) 可積分力学系における極限操作と解の挙動

研究課題名 (英文) Limiting procedure and behavior of solutions for integrable dynamical systems

研究代表者

竹縄 知之 (TAKENAWA TOMOYUKI)

東京海洋大学・海洋工学部・准教授

研究者番号：70361805

研究成果の概要 (和文)： 極限操作により可積分力学系が連続または超離散系に変換されるとき、方程式の解の振舞及び付随する様々な性質がどのように反映されるかということに着目して研究を行った。特に超離散系においては、超離散周期戸田格子---可積分系周期箱玉系---に対して、トロピカル代数幾何を用いて対応するトロピカルスペクトル曲線を発見し、付随するトロピカルデータ関数を用いて一般解を構成した。離散系においては高次元有理多様体との関係する例を発見した。また有理楕円曲面への作用を用いて可積分自励系の分類を行った。

研究成果の概要 (英文)： I studied how property of solutions reflects through limiting procedure from discrete dynamical systems to continuous or ultra-discrete systems. Especially, on ultra-discrete systems, by using tropical algebraic geometry, I found tropical spectral curve for ultra-discrete periodic Toda lattice, which is essentially equivalent to the integrable box and ball system. On discrete systems, I clarified relationship between some dynamical systems and higher dimensional rational variety. Moreover, using rational elliptic surfaces, I classified integrable autonomous systems.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	900,000	0	900,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,300,000	720,000	4,020,000

研究分野：大域解析学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：可積分系, パンルヴェ方程式, トロピカル幾何学, 離散系, 力学系

1. 研究開始当初の背景

近年、可積分力学系、特に離散および超離散可積分系の研究が活発に行なわれている。特に離散力学系においては坂井秀隆氏により始められた離散パンルヴェ方程式と有理曲面の関係に関する研究、超離散可積分系においては高橋大輔氏、薩摩順吉氏、時弘哲二氏、

国場敦夫氏らによる可積分箱玉形についての研究が注目を集めていた。前者においては筆者も代数的エントロピーの計算など、一定の貢献を果たしていた。また前者において、自励系の場合、有理楕円曲面への作用とみなせるが、そのより詳細な分類が可能なはずであった。後者においては、組み合わせ論的な複雑な議論を経て解が導かれていたが、その

幾何学的背景については、対応する離散および連続系においては知られていたにもかかわらず、その幾何学的背景については未知であった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、極限操作により可積分力学系が連続または超離散系に変換されるとき、方程式の解の振舞及び付随する様々な性質がどのように反映されるのかを明らかにすることである。多くの離散可積分系は適当な極限操作により、代数的な性質を保ったまま常微分方程式系や超離散系に変換される。本研究ではこれらの極限操作により解の代数構造や複雑さ、初期値空間といった性質がどのように反映されるのかということについて知見を得ることを目的とした。

特に有理（楕円）曲面、トロピカル代数幾何等を用いた幾何学的なアプローチにより、これらを包括的にとらえることを目的とした。

3. 研究の方法

以下の7つの項目について研究を行い、一定の成果を得た。

- (1) 鈴鹿医療科学大学の井上玲氏と共同で、離散周期戸田格子の超離散化で得られる超離散系について、近年ミカルキンらにより導入されたトロピカル幾何学を用いて研究した。離散方程式の Lax 表示から定まるスペクトル曲線のトロピカル化が超離散方程式において、どのような役割を果たすのかということに焦点をあてて研究を行った。
- (2) (1)に引き続き、鈴鹿医療科学大学の井上玲氏と共同で、超離散周期戸田格子について研究を行った。特に Mikhalkin-Zharkov によるトロピカルテータ関数を用いて一般解を表示することを目指した。そのために Fay の恒等式のトロピカル版を導入した。
- (3) 九州大学の津田照久氏と共同で、高次元のパンルヴェ型離散力学系の初期値空間を構成し、タウ関数の幾何学的意味づけを行った。
- (4) 東京海洋大学の関口良行氏、東京電気通信大学の脇隼人氏と共同で、実代数幾何学の多項式最適化への応用について研究した。
- (5) ルーマニア核物理研究所の A. S. Carstea 氏と共同で有理曲面上の力学系のうち、ファイバー構造の自己同型を引き起こすものについて、初

期値空間を用いた分類を行った。

- (6) 東京大学の坂井秀隆氏、ノーザンコロラド大学の A. Dzhamay 氏と共同で線形微分方程式の Shlesinger 変換についてハミルトン系としての母関数を求めた。
- (7) パリ第7大学の Grammaticos 氏、エコールポリテクニクの Ramanai 氏、九州大学の津田氏らと共同で、変わったふるまいをする可積分離散力学系について初期値空間を用いた研究を行った。

4. 研究成果

3の(1)から(7)に対応して以下のような成果を得た。

- (1) 離散周期戸田格子の超離散化で得られる超離散系について、トロピカルスペクトル曲線を用いて相空間からトロピカルヤコビ多様体への写像を構成できることを示した。そのために Adler - van Moerbeke による Lax 行列の固有ベクトル写像のトロピカル化を導入した。また可積分箱玉形との関係を明らかにした。可積分箱玉形はソリトン方程式だけでなく、量子可積分系や表現論、組み合わせ論ともつながる興味深い対象だが、上記の研究により、初めてトロピカル代数幾何的なアプローチが可能になった。(論文②⑥)
- (2) Fay の恒等式のトロピカル版を発見し、応用として超離散周期戸田格子の完全解を求めた。その際、超離散版の広田の双線形恒等式を用いた。結果として、極めて自然な一般解の表示を得た。(論文③⑤)
- (3) 射影直線の直積空間をその部分多様体でブローアップしてできる有理多様体の族に対し、その擬同型写像がワイル群を成すことを示した。そのうちアファインな部分を取ってくると、高次元のパンルヴェ型離散力学系が得られる。また初期値空間とタウ関数との関わりを明らかにした。(論文④)
- (4) 多項式最適化問題に対して緩和法を用いて得られる半正定値計画問題が強双対性を持つための必要十分条件を、実イデアルを用いて定式化した。また、G. E. Collins による Cylindrical Algebraic Decomposition を応用して、与えられた実多項式環のイデアルに対してその消滅イデアルを計算するアルゴリ

- ズムを見出した. (プレプリント arXiv:0901.2998)
- (5) 有理楕円曲面上の力学系の分類を行い, 特に楕円ファイバーを保たないものについて興味深い例を発見した. また, 射影平面上の9点でブローアップしてできる有理曲面が, いつ楕円曲面になるかという問題に関して, 周期積分を用いた簡明な必要十分条件を見出した. これは, 9点が一つの楕円曲線上の異なる点である場合には古典的な結果であるが, そうでない場合には新しい結果である. (論文投稿中)
- (6) 線形微分方程式の Shlesinger 変換の母関数を求めた. Shlesinger 変換は線形微分方程式の解に対する変換であって, 線形差分方程式の特性指数を有限値に留めさせるものであり, 方程式のレベルで見ると, 非線形で可積分な差分方程式が得られる. また差分力学系において母関数は差分版の Hamilton 表示とみなせることも分かる. 従って, 上記の結果により, Shlesinger 変換として得られる多くの差分系の差分版 Hamilton 表示が求められたことになり, 離散力学系の理論への貢献が期待できる. (論文準備中)
- (7) 初期値空間を計算し, そのファイバー構造およびそこへの作用を確定した. 代数的次数の増加がフィボナッチ数になる例を発見した. (論文⑦)

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

- ① 竹縄 知之, リーの理論と可積分性---解析学におけるガロアの影響, 現代思想, 39-5 (2011) 150--163 査読無
- ② 井上玲, 岩尾慎介, 竹縄知之, 超離散系に付随するトロピカルスペクトル曲線とテータ関数, 数理解析研究所講究録, 1650 (2009) 41--58 査読無
- ③ R. Inoue and T. Takenawa, Tropical Jacobian and the generic fiber of the ultra-discrete periodic Toda lattice are isomorphic, RIMS Kokyuroku Bessatsu B13 (2009) 175-190 査読有
- ④ T. Tsuda and T. Takenawa, Tropical representation of Weyl groups associated with certain rational varieties Advances in Mathematics, 221, (2009) 93--954 査読有
- ⑤ R. Inoue and T. Takenawa, A tropical analogue of Fay's trisecant identity and the ultra-discrete periodic Toda lattice, Communications in Mathematical Physics, 289 (2009) 995--1021 査読有
- ⑥ R. Inoue and T. Takenawa, Tropical Spectral Curves and Integrable Cellular Automata, International Mathematics Research Notices 2008 rnn019 (2008) 1--27 査読有
- ⑦ T. Tsuda, B. Grammaticos, A. Ramani and T. Takenawa, A Class of Integrable and Nonintegrable Mappings and their Dynamics Letters in Mathematical Physics 82 (2007) 39--49 査読有

[学会発表] (計 15 件)

- ① 竹縄知之, Tropical Spectral Curves and Integrable Cellular Automata, コロラド州立大学セミナー, 2010年12月20日, コロラド州立大学 (Fort Collins (アメリカ))
- ② 竹縄知之, A classification of two dimensional integrable mappings and rational elliptic surfaces, the 7th International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems, 2010年12月17日, 南フロリダ大学 (Tampa (アメリカ))
- ③ 発表者・タイトル②と同じ, 函数方程式論サマーセミナー, 2010年7月30日, 東京大学玉原国際セミナーハウス (群馬県)
- ④ 竹縄知之, Toropical geometry and integrable ultra-discrete dynamical systems, The 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2010年5月26日, ドレスデン工科大学 (Dresden (ドイツ))
- ⑤ 竹縄知之, 実イデアルと多項式最適化に対する半正定値計画, 研究集会「トロピカル幾何と超離散系の新展開」, 2010年3月11日, 京都大学工学部 (京都府)
- ⑥ 竹縄知之, A tropical analogue of Fay's trisecant identity and the ultra-discrete periodic Toda lattice, Mathematical physics seminar, 2009年4月23日, ラフバラ大学 (Loughborough, (イギリス))
- ⑦ 竹縄知之, Tropical geometry and integrable cellular automata II --- Bilinear form and tropical Fay's identity, Workshop "Geometric Aspects of Discrete and Ultra-discrete

- Integrable Systems” 2009年3月31日, グラスゴー大学 (Glasgow (イギリス))
- ⑧ 発表者・タイトル⑤と同じ, 第1回日本数式処理学会理論分科会研究会, 2009年2月13日, 東京大学工学部 (東京都)
 - ⑨ 発表者・タイトル⑥と同じ, 大阪大学代数幾何・複素幾何セミナー, 2008年10月17日, 大阪大学大学院理学研究科
 - ⑩ 発表者・タイトル⑥と同じ, Workshop “Crystals and Tropical Combinatorics” 2008年8月27日, 関西セミナーハウス (京都府)
 - ⑪ 発表者・タイトル⑥と同じ, RIMS 研究集会「可積分数理の拡がり」, 2008年8月13日, 京都大学数理解析研究所
 - ⑫ 発表者・タイトル⑥と同じ, 東京無限可積分系セミナー, 2008年2月23日, 東京大学大学院数理科学研究科 (東京都)
 - ⑬ 発表者・タイトル①と同じ, 研究集会「トポロジカル幾何学と関連分野」, 2007年9月11日, 北海道大学大学院理学研究科 (北海道)
 - ⑭ 発表者・タイトル①と同じ, 研究集会「可積分数理の新潮流」, 2007年8月20日, 京都大学数理解析研究所 (京都府)
 - ⑮ 発表者・タイトル①と同じ, 函数方程式サマーセミナー, 2007年8月6日, ビレッジ安曇野 (長野県)

[図書] (計 1 件)

竹縄知之, サイエンス社, コア・テキスト微分積分, 2009年, 222 ページ

[その他]

ホームページ等

<http://www2.kaiyodai.ac.jp/~takenawa/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

竹縄 知之 (TAKENAWA TOMOYUKI)
東京海洋大学・海洋工学部・准教授
研究者番号: 70361805

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者 なし