

平成 22 年 5 月 18 日現在

研究種目： 若手 B  
 研究期間： 2007 ~ 2009  
 課題番号： 19740085  
 研究課題名（和文）  
 部分双曲力学系と可解り一群の作用の剛性  
 研究課題名（英文）  
 Rigidity of partially hyperbolic dynamical systems and actions of solvable Lie groups  
 研究代表者  
 浅岡 正幸 (Asaoka Masayuki)  
 京都大学・大学院理学研究科・准教授  
 研究者番号： 10314832

研究成果の概要（和文）：30年にわたる未解決問題であった，非可換2次元リー群の3次元多様体への局所自由作用の完全な分類に成功し，さらに作用の変形空間を構成した．この作用の自然な高次元化については，予想に反して非自明な変形が存在しないことが証明できた．また，可解り一群のパラメータ剛性に関する予想を軌道葉層のコホモロジーを用いて自然な形で定式化した．

研究成果の概要（英文）：I gave a complete classification of locally free actions of the two-dimensional non-abelian Lie group on three-manifolds, which was a open problem for thirty years. I also constructed the deformation space of the actions. For analogous actions in higher dimension, I conjectured that they are flexible similar to the low-dimensional case. However, it turned out that the actions exhibits rigidity in higher-dimension. I also formulated a natural conjecture on parameter rigidity of locally free actions of solvable Lie groups in terms of the leafwise cohomology of the orbit foliations

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,000,000	0	1,000,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,000,000	600,000	3,600,000

研究分野： 力学系理論，幾何学

科研費の分科・細目：数学・大域解析

キーワード： 群作用・双曲力学系・葉層構造

## 1. 研究開始当初の背景

群作用の剛性問題はこの20年の間に急激に発展してきた研究分野であり，可換群の作用については Katok-Spatzier による局所剛性を持つ作用の発見以降，多くのことがわかってきている．その一方で，可換でない可解

群の作用については，1979年の Ghys による3次元多様体上の2次元非可換リー群体積保存作用の分類以降，いくつかの研究が散発的に行われてきたものの，Ghys が扱った問題を体積を保たない作用にまで拡張した場合にどうなるか，という自然な疑問ですら30

年にわたって未解決なままであった。

その一方で、最近になって、いくつかの群作用については軌道のなす葉層のコホモロジーの消滅が、作用の剛性と密接な関わりを持つことがわかり、松元・三松によって、Ghys が扱った作用に関わるコホモロジーの計算も行われたが、上の疑問の解決までにはいたらなかった。

以上のように、可換群の作用の場合を除いては統一的な枠組みは存在しておらず、個別の例についての結果が得られているのみであった。

本研究の代表者は、本研究開始以前に力学系理論を用いて、3次元多様体上のある種の部分双曲系の研究をしており、系が滑らかな不変葉層を持つ場合の剛性を示すことに成功していた。この場合に得られる葉層は、Ghys が研究した作用の軌道のなす葉層と一致しており、群作用の剛性問題を部分双曲系の理論を用いて研究することができる可能性を示唆していた。

## 2. 研究の目的

上で述べたように、可換群の場合を除いて、リー群の作用の剛性問題を統一的に扱う枠組みは、本研究の開始時点では存在していなかった。本研究の最初の目的は、そのような理論の構築を、可換群の作用に対して行うことであった。統一的な枠組みとしては、作用の無限小変形の葉層コホモロジーによる記述と、無限小変形が実際の変形として実現されるための障害の記述を目指した。

本研究の二つ目の目的は、統一的な枠組みの応用として、具体例についてその剛性、もしくは柔軟性を示すことであった。より具体的には、Ghys 以来の問題である3次元多様体上の2次元非可換リー群の局所自由作用の分類問題と、その高次元における類似の問題の解決を目指した。

また、群作用の剛性問題は、多くの例においては部分双曲力学系の持つ剛性と密接に関係しているため、群作用の剛性に関する研究で得られた手法を部分双曲力学系の剛性問題へと応用することも目的とした。特に、滑らかな不変葉層を持つ部分双曲力学系の持つ剛性の解明と、余次元1アノソフ流の位相同値類に関する分類問題の解決を目指した。

## 3. 研究の方法

最初に、可換リー群の作用の最も基本的な例である、2次元非可換リー群の3次元多様体への作用の分類問題に着手した。松元・三松による葉層コホモロジーの計算から、これまでに知られていなかったような作用の存在が示唆されていた。まず、彼らの計算をもとに知られている作用の無限小変形のなす

空間を計算し、非自明な無限小変形の存在を確認した。さらに、無限小変形を用いるものとは全く異なる方法により、これまでに知られていなかった種類の作用を構成することができた。これらの結果をふまえて、作用全体のなす空間の構成を次の目標として研究を行った。これらの研究においては、代表者がこれまで研究してきたと（部分）双曲力学系の理論が有効に利用された。また、この例のある種の高次元化の場合に、無限小変形の空間が非自明になると予測されたので、この場合の作用の変形可能性についても調べた。

より一般に、可換リー群の作用の無限小変形のなす空間を記述し、それを用いて作用の変形を記述する方法を模索した。その際には、小平-Spencer による複素多様体の変形理論を源流とする、多様体上の種々の幾何構造の変形理論の枠組みを参考に、それらとの共通部分と差異を理解することを研究の第一段階とし、それをもとに統一的な理論の構築を目指した。

これらと平行して、3次元多様体上の部分双曲力学系の重要な例である射影的アノソフ流をよく知るために、その剛性についての研究を行った。また、2次元非可換リー群の作用の新しい構成方法を余次元1アノソフ流の不変体積の存在問題に応用した。

本研究の遂行においては、国内外の研究集会における関連する領域の専門家との議論や、文献からの情報収集が重要な役割を果たした。実際、本研究の研究期間中にフランス、ポルトガル、アメリカ、イタリア、ポーランドで行われた国際研究集会に参加し、そのいくつかでは研究成果の発表を行った。また、国内のいくつかの研究集会においても、招待講演者として成果発表を行った。また、国内外のセミナーにおいても成果発表を行い、そこでの参加者との議論は研究の遂行に置いて非常に有益なものであった。

## 4. 研究成果

30年来の未解決問題であった、2次元非可換リー群の3次元多様体への局所自由な作用の分類問題を解決し、その過程で、これまでに知られていなかった非等質的作用を得た。さらに、これらの作用をすべて含むような普遍的な変形空間を構成し、3次元多様体上の2次元非可換リー群の作用全体のなす空間について完全な記述を得た。これらの結果の一部は、現在投稿中である。

上の結果において用いられた手法は、群作用の変形問題ではこれまで使われることのなかった統計物理における平衡状態の概念に基づくもので、他の状況への応用が期待される。実際に、代表者自身も一つの応用として、余次元1アノソフ流の不変体積の存在に関する結果を得ている。この結果は2005年

に Simic によってアナウンスされた結果と合わせると、長年の未解決問題であった余次元 1 アノソフ流の分類問題 (Verjovsky 予想) を解決することになる重要なものであったが、不幸にも Simic の結果には不備が見つかったために、Verjovsky 予想そのものは現在も未解決のままである。

リー群の局所自由作用の無限小変形を軌道葉層のコホモロジーを用いて記述した。さらに、上で扱った 3 次元多様体上の 2 次元非可換リー群の作用の場合に、無限小変形のなす空間の次元が変形空間のそれと一致することを確認した。無限小変形の情報をもとに一般的な枠組みを用いて変形空間を再構成することも試みたが、それについては未だ成功していない。しかし、可解群の作用の場合には、無限小変形の消滅から作用の剛性を得るための一般的な枠組みを見つけることができた。

3 次元多様体上の 2 次元非可換リー群の作用の例のある種の高次元化について、その局所剛性を得ることができた。その証明においては、双曲力学系の剛性理論が用いられた。作用の無限小変形のなす空間は非自明となることが予測されたので、この結果は衝撃的なものであった。無限小変形のなす空間の非自明性は残念ながら、未だ証明されていない。

これらと平行して、射影的アノソフ流の剛性について研究をし、不変葉層の一方が滑らかであるときには、Reeb 成分を持たないという強い性質を持つことを証明した。また、余次元が高い場合に起こりうるダイナミクスの複雑さの例として、高次元力学系においては記号拡大を持たないものが豊富に存在することを示した。

以上のように、Ghys 以来の 30 年来の問題の解決の他、研究開始当初の目標の多くは達成されたが、その一方で、作用の無限小変形の記述と、それを実際の変形と結びつける枠組みは得られたものの、本研究を通して得られた具体例についての変形の存在や剛性は、その枠組みではなく、他の手法によるものであり、残念ながら、統一的な枠組みを直接適用できる例はまだ知られていない。また、部分双曲力学系の剛性問題に関しては、余次元が高い場合にも適用できると思われるいくつかの有望な方法を発見したものの、具体的な成果は得るところまでは到達できなかった。これらの問題は今後の課題としたい。

##### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

1. M. Asaoka, On Invariant volumes of codimension-one Anosov flows and

the Verjovsky conjecture. *Invent. Math.*, 174 (2008), no. 2, 435 - 462.

2. M. Asaoka, Hyperboic sets exhibiting  $C^1$ -persistent homoclonic tangency for higher dimensions. *Proc. A.M.S.* 136 (2008), no. 2, 677-686.
3. M. Asaoka, Invariants of two dimensional projectively Anosov diffeomorphisms and their applications. *J. Math. Japan. Soc.*, 59 (2007) no.3, 603-649.
4. M. Asaoka, On Reeb components of invariant foliations of projectively Anosov flows. *Top. and its Appl.* (Special Issue: The Third Joint Meeting Japan-Mexico in Topology and its Applications) 154 (2007), no.7, 1263-1268.

5. [学会発表] (計 13 件)

1. 浅岡正幸, infinitesimal and global deformations of homogeneous actions of the affine group, 葉層構造と微分同相研究集会, 東京大学玉原セミナーハウス, 2009 年 10 月 29 日.
2. 浅岡正幸, 実階数 1 リー群の放物型部分群の等質作用の局所剛性問題. 日本数学会 2009 年度秋季総合分科会トポロジー分科会, 大阪大学, 2009 年 9 月 25 日.
3. 浅岡正幸, Local rigidity of some homogeneous actions of parabolic subgroups of the isometry group of the hyperbolic space. ENS de Lyon (Lyon, France), 2009 年 3 月 16 日.
4. 浅岡正幸, Rigidity of some actions of the complex affine group. 力学系研究集会, 日本大学軽井沢研修所, 2009 年 1 月 11 日.
5. 浅岡正幸, Local rigidity of some homogeneous actions of the complex affine group. 葉層構造論シンポジウム, 東京大学玉原国際セミナーハウス, 2008 年 10 月 30 日.
6. 浅岡正幸, Hyperbolic set exhibiting  $C^1$ -persistent homoclinic tangency and its applications I, II. 研究集会「双曲性を越えた位相力学系の新展開」, 京都大学数理解析研究所, 2008 年 9 月 30 日, 10 月 2 日.
7. 浅岡正幸, Flexibility of codimension-one locally free actions of the affine group. "Dynamical Systems: Geometric Structures and Rigidity", Banach Center new conference site (Bedlewo, Poland), 2008 年 7 月 21 日.
8. 浅岡正幸, Codimension-one Anosov flows in higher dimensions. "School and Workshop on Dynamical Systems", Internatinal Center for Theoretical Physics (Trieste, Italy), 2008 年 7 月 16 日.
9. 浅岡正幸, 可解リー群の余次元 1 作用の剛性と柔軟性. 日本数学会 2008 年度年会トポロジー

一分科会, 近畿大学理工学部, 2008年3月25日.

10. 浅岡正幸, On invariant volumes of codimension-one Anosov flows. Special Session: Hypebolic Dynamics, AMS annual meeting (San Diego, USA), 2008年1月6日.

11. 浅岡正幸, Classification of codimension-one Anosov flows in higher dimension - the Verjovsky conjecture. International Conference on Topology and its Ap- plications 2007 (Kyoto), 2007年12月6日.

12. 浅岡正幸, 実数直線上のアフィン変換のなす群の余次元1作用の分類. 葉層構造論シンポジウム, 東大玉原セミナーハウス, 2007年10月30日-11月2日.

13. 浅岡正幸, 可解り一群の余次元1作用の剛性について, 第54回トポロジーシンポジウム, 会津大学, 2007年8月8日.

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

○取得状況 (計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

[その他]

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

浅岡 正幸 (Asaoka Masayuki)

京都大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号: 10314832

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号:

(3) 連携研究者

( )

研究者番号: