

平成 22 年 6 月 8 日現在

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2007～2009

課題番号：19740231

研究課題名 (和文) 代数幾何の手法による可積分系の研究

研究課題名 (英文) Study on integrable systems with algebra geometrical method

研究代表者

山崎 玲 (井上 玲) (YAMAZAKI REI)

鈴鹿医療科学大学・薬学部・助教

研究者番号：30431901

研究成果の概要 (和文)：代数幾何的手法(代数曲線論、トロピカル曲線論)を用いて有限自由度をもつ離散・超離散可積分系を解析した。代数的完全可積分性の概念を初めてトロピカル幾何と区分線形写像の世界に拡張し、周期的境界条件を持つ超離散戸田格子の一般解を構成した。Mumford 系の退化ファイバーを調べて有理関数解を構成した。また、表現論的手法(クラスター代数、クラスター圏の理論)を用いて量子可積分系に出自のある差分方程式(T システム, Y システム)の周期性を証明した。

研究成果の概要 (英文)：By using algebro geometrical method, we studied the finite-dimensional discrete / ultradiscrete integrable systems. We generalized the notion of algebraically completely integrability to that of tropical geometry and piecewise-linear map, and constructed the general solution to the ultradiscrete periodic Toda lattice. We also explicitly constructed the rational solution to the Mumford system. By applying cluster algebra and cluster category, we proved the periodicity of T-system and Y-system whose origin is in quantum integrable models.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,000,000	0	1,000,000
2008 年度	900,000	270,000	1,170,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,700,000	510,000	3,210,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：物理学・数理物理, 物性基礎

キーワード：数理物理, 可積分系, 超離散化, トロピカル幾何, 代数幾何, ヤコビ多様体

1. 研究開始当初の背景

2000年頃から「箱玉系」というセルオートマトンの研究が国内で活発に行われ、この系

がソリトン解という古典的な性質と、量子群の表現論が記述する対称性という量子的な性質の両方を備えた可積分系であることが分か

ってきた。ごく最近では、この系に周期的境界条件をつけた場合の数理構造に注目が集まっており、興味深い展開を見せている。時弘らは周期的箱玉系の周期に関するある予想を提唱し、それがリーマン予想と等価であることを示した。また国場らは、Bethe仮設法という量子系を解く手法を駆使してこの系の初期値問題を解き、その解を記述するために「超離散Jacobi多様体の超離散テータ関数」を提唱した。

また1997年にBabelon-Barnard-Smirnovは無限自由度を持つ量子系と古典系の対応に関する考察を行い、ある量子系の相関関数を支配する「形状因子の空間」と、基本的な古典ソリトン系であるKdV方程式の「解の空間」とは、よく似た代数的な構造を持っていることを示した。中屋敷-Smirnovは2001年に「Mumford系」という力学系を土台にしてこの構造の有限自由度版を提唱した。彼らは、Mumford系の持つ代数的完全可積分性というよい性質の考察を深め、Jacobi多様体のコホモロジーを使ってMumford系の解の空間を記述した。

2. 研究の目的

本研究の目的は、上述のような背景をもつ量子系、古典系、セルオートマトンの数理構造の間の不思議な関係を、Jacobi多様体やテータ関数などの代数幾何的な手法を用いて調べることである。本課題の目標は大きく次の二つに分けられる。

- (1) 箱玉系のスペクトル曲線をトロピカル幾何の枠組みで実現し、代数的完全可積分性の概念をセルオートマトンの世界に広げる。
- (2) Mumford系の類似や拡張に相当する代数的完全可積分系を構成し、「解の空間」の代数幾何的な性質を調べる。

3. 研究の方法

- (1) 国場らの提唱した箱玉系と超離散テータ

関数の関係には、セルオートマトンに対する代数的完全可積分性の一端が現れていると考えられる。この全体像を明らかにするため、本課題では超離散テータ関数の代数幾何的な素性を調べ、有限自由度の区分線形写像の代数的完全可積分性を考察する。複素数体上の有限自由度系に対する代数的完全可積分性「一般等位集合のコンパクト化が代数曲線のJacobi多様体に同型で、この同型により系の時間発展はJacobi多様体上の線形運動に移される」の超離散版を定式化するために次の問題を考察する：

- ① 区分線形写像の一般等位集合と、トロピカル曲線のトロピカルJacobi多様体との関係を調べる。
- ② 超離散テータ関数を使って区分線形写像の一般解を記述する。

これらの問題を通じ、代数幾何と表現論を単純化する極限の交点に箱玉系が住んでいる有様が明らかになることを期待している。

(2) Mumford系は、超楕円曲線をスペクトル曲線に持ち、可積分性に関する様々な研究の足場となってきた重要な系である。Beauvilleは1990年にMumford系を(超楕円曲線とは限らない)一般の代数曲線のJacobi多様体に拡張する問題を、代数幾何の手法を用いて明快に解決した。私はこれまでの研究で、Mumford系の類似系に中屋敷らの議論を適用してアフィンJacobi多様体のコホモロジーを調べ、一方Beauvilleの方法を応用して類似系の拡張を構成している。本課題では次の問題を考察する：

- ① これらの拡張系たちの解の空間の解析を行い、特に超楕円曲線とそうでない代数曲線の間にある代数幾何的な違いを調べる。
- ② Mumford系など超楕円曲線に付随した力学系において、スペクトル曲線が(超楕円曲線から)退化した場合にも等位集合上のコホモロジー群を記述し続ける仕組みを作り、解の

空間との対応を調べる。

4. 研究成果

(1) トロピカル幾何の枠組みで可積分なセルオートマトン(超離散戸田格子、箱玉系)を記述することに成功し、代数幾何的な可積分性の概念をトロピカル幾何の世界に広げるといふ本研究課題の第一歩を踏み出した。この成果は東京海洋大学の竹縄知之氏との共同研究である。19年度は、超離散戸田格子の一般等位集合があるトロピカル曲線のJacobi多様体と同型であることを予想し、低次元の場合の証明を与えた。さらに超離散戸田格子と箱玉系の関係を詳しく調べ、国場らが導入した超離散Jacobi多様体をトロピカル幾何の枠組みで説明した。20年度は、代数曲線に対するFayの恒等式のトロピカル幾何における類似を考察し、ある種の超楕円トロピカル曲線の場合にトロピカルRiemannデータ関数がFayの恒等式のトロピカル類似を満たすことを証明した。この恒等式を応用して超離散戸田格子の一般解を構成し、前年度に提唱した予想「超離散戸田格子の一般等位集合はトロピカルJacobi多様体と同型である」の証明に成功した。さらに21年度は東京大学の岩尾慎介氏と共同研究を行い、複素代数曲線上とトロピカル曲線上でそれぞれ定義されているAbel積分の間の関係を詳しく調べ、超楕円とは限らないトロピカル曲線のトロピカルデータ関数が満たすFayの三項間恒等式を導入した。この恒等式を一般化された超離散戸田格子方程式の一般解の構成に応用し、一般解に関する予想を提出した。

この成果は大きな注目を集め、日本数学会2007年度総合分科会で特別講演、2009年の超離散系に関する国際会議「Geometric Aspects of Discrete and Ultra-discrete Integrable Systems」(イギリス・グラスゴ

一大学)の招待講演等の機会を得た。一連の研究をさらに発展させるため、2010年2月から3月にかけてLoughborough大学(イギリス)に滞在し、同大学のVeselov氏と活発な議論を行った。

(2) Mumford系のスペクトル曲線が最も退化した場合の詳しい解析を行い、この特別なスペクトル曲線に付随する等位集合は一般化されたJacobi多様体のアフィン部分と同型であることを示した。さらに、この系とKdV方程式の関係からKdV方程式の有理解と一般化されたJacobi多様体との関係を明らかにした。これは東北大学の山崎隆雄氏、Poitiers大学のPol Vanhaecke氏との共同研究の成果である。

この研究のため2007年11月から12月にかけてPoitiers大学(フランス)に滞在し、Vanhaecke氏と活発な議論を行った。

(3) 量子群の対称性を持つ可解格子模型を解く際、対称性を記述するLie環毎にT-system、Y-systemと呼ばれる差分方程式が得られるが、この方程式に関してZamolodchikovらが1990年代に提唱した予想「ある境界条件の下で周期性を持つ」が知られている。一方、A、D、E型のLie環の場合に、筋の表現論で導入されたクラスター代数の生成関係式の中にこれらの差分方程式が含まれていることが指摘されていた。名古屋大学の中西知樹氏らとの共同研究でこの視点を掘り下げ、さらにクラスター圏の理論を使って一般の有限次元単純Lie環の場合にこの予想を証明した。20年度には、対応する筋が素直に構成できるA、D、E型の場合にこの予想を証明した。B、C、G、F型のようにDynkin図がsimply-lacedでない場合には事態が複雑になる。我々は差分方程式を記述する新しい筋を構成することから始め、対応するクラスター代数とクラス

ター圏の理論を詳しく調べることにより、21年度に予想の証明に成功した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

Rei Inoue and Tomoyuki Takenawa, Tropical spectral curves and integrable cellular automata, International Mathematics Research Notices 2008, pp1-27 (rnn019) (2008) 査読有.

Rei Inoue and Tomoyuki Takenawa, A tropical analogue of Fay's trisecant identity and the ultra-discrete periodic Toda lattice, Communications in Mathematical Physics 289, pp995-1021 (2009) 査読有.

Rei Inoue and Tomoyuki Takenawa, Tropical Jacobian and the generic fiber of the ultra-discrete periodic Toda lattice are isomorphic, RIMS Kokyuroku Bessatsu B13, pp175-190 (2009) 査読有.

Rei Inoue, Osamu Iyama, Atsuo Kuniba, Tomoki Nakanishi and Junji Suzuki, Periodicities of T-systems and Y-systems, Nagoya Mathematical Journal 197, pp59-174 (2010) 査読有.

Rei Inoue, Pol Vanhaecke and Takao Yamazaki, Singular fiber of the Mumford system and rational solutions to the KdV hierarchy, Communications on Pure and Applied Mathematics 63, pp508-532 (2010) 査読有.

[学会発表] (計 5 件)

井上 玲, Tropical spectral curves and integrable cellular automata, 日本数学会 2007 年度総合分科会, 東北大学.

井上 玲, マンフォード系の退化ファイバーと有理関数解, 日本数学会 2008 年度年会, 近畿大学.

井上 玲, Fay の恒等式のトロピカル類似と超離散周期戸田格子, 日本数学会 2008 年度周期総合分科会, 東京工業大学.

中西知樹, T-system の周期性について, 日本数学会 2009 年度年会, 東京大学.

中西知樹, T and Y-systems, dilogarithm identities and cluster algebras: nonsimply laced case, 日本数学会 2010 年度年会, 慶応義塾大学.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ等

<http://sites.google.com/site/reiinouesite/Home/research>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山崎 玲(井上 玲)

(YAMAZAKI REI (INOUE REI))

鈴鹿医療科学大学・薬学部・助教

研究者番号 : 30431901

(2) 研究分担者

()

研究者番号 :

(3) 連携研究者

()

研究者番号 :