

機関番号：85303

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2007～2010

課題番号：19740244

研究課題名 (和文) スーパー代数に付随する可解格子模型とその周辺

研究課題名 (英文) Solvable lattice models associated with superalgebras and related topics

研究代表者

坪井 禪吾 (TSUBOI ZENGO)

岡山光量子科学研究所・協力研究員

研究者番号：90416420

研究成果の概要 (和文)：

Superalgebra に付随する可解模型に関連する以下のような研究を行った。 $U_q(\mathfrak{sl}(2|1)^{\wedge})$ に付随する Baxter Q 演算子とそれらの間の函数関係式および T-演算子 (転送行列) に対する Wronskian 型の公式を構成した。我々の定式化は、演算子が作用する空間に依存しないため、格子模型と共形場理論の両方に適用可能である。Wronskian 型の公式の $U_q(\mathfrak{gl}(M|N)^{\wedge})$ の場合への非自明な拡張を行い、T-system の Wronskian 型の解を求めた。これは q -(super) 指標の一種であると考えられる。また Baxter Q 演算子が $2^{\{N+M\}}$ 種類存在しうることを初めて提案した。ここで開発した技術を用いて、素粒子物理学における AdS/CFT 対応に関連して考案された可解模型に対する T-system と Q-system の解を与えた。 $\mathfrak{gl}(M|N)$ の指標に作用する「co-derivative」と呼ばれる「微分」を用いて、 $2^{\{N+M\}}$ 種類の Baxter Q 演算子の全く新しい構成法を提案した。これによって従来の Bethe 仮説法を用いずに、Bethe 方程式を導出することに成功した。またソリトン理論におけるバックlund変換と Baxter Q 演算子の関係を演算子のレベルで明らかにした。

研究成果の概要 (英文)：

We have researched on the following topics on integrable models related to superalgebras. We have constructed the Baxter Q-operators for $U_q(\mathfrak{sl}(2|1)^{\wedge})$, functional relations among them and Wronskian-type expressions of T-operators (transfer matrices). Our formulation can be applicable to both lattice models and conformal field theory since it is independent of the space where the operators act on.

I made non-trivial generalization of Wronskian-type formulae to $U_q(\mathfrak{gl}(M|N)^{\wedge})$ case, and gave Wronskian-type solutions of the T-system. They are yet another form of the so-called q -(super)characters. I identified that the number of the Baxter Q-operators is $2^{\{M+N\}}$ for the first time.

Based on the technique developed through the above research, we gave solutions to the T- and Q-systems for the AdS/CFT in particle physics.

We proposed a new definition of the $2^{\{M+N\}}$ Baxter Q-operators based on 'co-derivative' on generating functions of supercharacters of $\mathfrak{gl}(M|N)$, and derived the Bethe ansatz equations without using the Bethe ansatz. We also clarified relations between Backlund transformations in the soliton theory and the Baxter Q-operators on the level of operator.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,000,000	0	1,000,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,100,000	630,000	3,730,000

研究分野：数理物理学

科研費の分科・細目：物理学・数理物理・物性基礎

キーワード：数理物理，可解模型，ベータ仮説，AdS/CFT 対応，superalgebra，表現論，統計力学，可積分系

1. 研究開始当初の背景

Superalgebra とは Z_2 によって次数付けされた代数であり，一言で言うとボゾンとフェルミオンの対称性を同時に記述する代数のことである．その意味ではこれは物理学において基本的な代数であると言える．特にここで問題にするのは主として量子 affine superalgebra と呼ばれるもので，次数付けされていない普通の量子アフィン代数(量子群)を特殊な場合として含んでいる．多くの可解格子模型の対称性は量子群によって記述される．従って殆どすべての可解格子模型の対称性は量子 affine superalgebra によって記述される．ところが superalgebra に付随する可解格子模型は，superalgebra の表現論の複雑さも相まって，必ずしも良く理解されているとは言えない．そこで，私は博士課程に在籍していた頃から superalgebra に付随する可解格子模型に関心をもって来た．当時は代数的 Bethe 仮説法を状態空間が基本表現に対応する模型に対して当てはめて転送行列の固有値を求めた論文は多数出版されていたが，状態空間がテンソル表現など複雑な表現に対する模型(fusion 模型など)の転送行列の固有値公式(DVF)をスペクトルパラメータに依存する Young 図形と対応させて系統的に求めた論文は私の 1997 年-1999 年の論文以外には存在せず，このテーマに関しては一人で孤立して研究を行っていた．Bethe 仮説法は統計物理学との関連で扱われることが多かったのであるが，2003 年頃から素粒子物理学において AdS/CFT 対応に関連して superalgebra に付随する可解格子模型の Bethe 仮説法に関する論文が非常に多数出版されるようになった．その中には fusion 模型の DVF に言及する論文も現れ，私の論文で提案した公式の特殊な場合に類似した公式について議論している．Superalgebra の Dynkin 図形は一意的では無いことに対応して，相異なる Bethe 方程式の等価性について Dynkin 図形と対応させて議論している論文を見かけるが，このテーマに関して一般の $sl(r+1|s+1)$ の場合に系統的に議論したという意味では，私の 1998 年の論文が最初であろう．ハバード模型は統計物理学において基本的な模型であるが，ハバード模型やその拡張とその Bethe 仮説による解析に関する論文が素粒子物理学にも

現れ，ハバード模型における超対称性の起源が明らかにされた．上記の Bethe 仮説法の例に見られるように，可積分系の手法は必ずしも物理学の個々の分野によらないものであるが故，既存の分野の枠にとらわれない研究が望まれる．以上のような学術的背景を踏まえ，最近重要性が増している superalgebra に付随する可解模型に関連する研究を行う．

2. 研究の目的

統計物理学や素粒子論といった既存の分野の枠にとらわれずに，superalgebra に付随する可解模型に関連する問題を数理物理学的観点から研究する．

3. 研究の方法

表現論や組み合わせ論など数学的手法と，数式処理ソフトの Mathematica を用いた実験的な方法を組み合わせて研究を遂行した．Bethe 仮説法は統計物理学および，最近では素粒子物理学の研究手法の一つであるが，ここでは Bethe 仮説法を「道具」として個々の模型に当てはめるのではなく，Bethe 仮説法そのものを Baxter Q 演算子との関連で基礎から見直し，最終的には Bethe 仮説法を用いずに Bethe 仮説方程式を導出することに成功した．この意味で私の研究には「研究の方法自体の研究」という側面がある．

4. 研究成果

(i) オーストラリア国立大学の Bazhanov 氏と「 $U_q(sl(2|1))$ という量子アフィンスーパー代数に付随する可解格子模型の転送行列(とその固有値)の Baxter Q 演算子による Wronskian 型の表示式を求める」という問題について 2003 年 6 月から 5 年間共同研究を行い，研究結果を内外の学会で発表し，論文を公表した．この Wronskian 型の表示式は数学的にはワイルの指標公式のスーパー代数版(Sergeev-Pragacz 公式)の量子アフィンスーパー代数類似に相当する．あるいは q -指標のスーパー代数版の一種と考えられる．指標は数学の表現論において基本的な量で

ある。q-指標はそのスペクトルパラメータ依存版である。量子アフィン代数の有限次元表現はスペクトルパラメータに依存する。そのため単なる指標を与えただけでは表現を特長付けるには不十分である。スペクトルパラメータに依存する q-指標を考える意義の一つはここにあり、この研究は発展途上のスーパー代数の表現論に物理学の観点から寄与するものである。また、物理的には、強相関電子系のモデルの解析や素粒子物理学において活発に研究がなされていた。

AdS/CFT 対応に関連して現れる可解格子模型のエネルギースペクトルの解析に関する研究等に役立つことが期待される。Wronskian型の公式をq-oscillator代数の表現論の観点から証明した。我々の定式化は、演算子が作用する空間に依存しないため、格子模型とCFTの両方に適用可能である。実際に具体例として、CFTのq-頂点演算子を用いたL演算子と、quantum spaceが3次元表現の場合の格子模型に対するL演算子を構成することに成功した。Baxter Q演算子はこれらのL演算子のスーパートレースとして与えられる。

可解格子模型の転送行列と微分方程式(シュレディンガー方程式の一種)の接続係数との間には不思議な対応があることが知られている。より広く、量子力学的多体問題と1体問題の間に対応関係が存在し、1体問題の手法であるWKB法を複雑な多体問題の解析に応用可能であること等が指摘されている。6種類のBaxter Q演算子の満たす関係式と同じ関係式を接続係数が満たすことなどが判明した。

(ii) $U_q(\mathfrak{gl}(M|N))$ に対するBaxter Q演算子の満たすべき函数関係式とT-systemのWronskian型の解を求めた。これは(i)の結果の非自明な拡張になっており、 $U_q(\mathfrak{gl}(M|N))$ の表現のq-(スーパー)指標の新しい表示式に相当すると考えられる。また、ロンスキアン型の表示式が[V. Kazakov, A. Sorin, A. Zabrodin, Nucl. Phys. B790 (2008) 345]によって提案されたバックlund変換式を満たすことなどを証明した。Baxter Q演算子が $2^{\lfloor N+M \rfloor}$ 種類存在しうることを初めて提案した。私の定式化の特筆すべき点として、q-(スーパー)指標のワイル群不変性が明確になることが挙げられる。

(iii) 素粒子物理学におけるAdS/CFT対応に関連して考案された可解模型についてV. Kazakov氏(ENS)とN. Gromov氏(DESY)と共同研究を行った。Kazakov氏らが2009年1月に提案したY-systemに関する論文はこの分野の研究者に大きなインパクトを与えた。このY-systemに対して変数変換すると、

1997年の私の論文で提案した超対称版のT-system(の $\mathfrak{sl}(2|2)$ の場合への特殊化)を二つ繋ぎ合わせた形になる。

従って、私が(ii)で提案したBaxter Q演算子によるWronskian型の公式に類似した公式を求めれば、このY-systemの解を解析することが可能になると考えられる。そこで先ずAdS/CFT対応に関連して提案されたT-systemがQ-systemに退化する't Hooft couplingの強結合極限の周辺について調べた。ここでQ-systemとはT-systemのスペクトルパラメータを無視することによって得られる函数方程式のことである。Q-systemの解を求め、それが $\mathfrak{gl}(4|4)$ のある種の無限次元表現のスーパー指標と一致することを発見した。更に古典AdS $_5 \times S^5$ 超弦理論のモノドロミー行列のスーパートレースがこのQ-systemの解と一致することなどが判明した。

(iv) Kazakov氏のグループと共同研究(iii)を継続し、私の研究(ii)で開発した技術を用いて、AdS/CFT対応に関連して提案されたT-systemのWronskian型の解を与えることに成功した。このT-systemの解は、任意の't Hooft couplingの値に対する任意の長さの演算子の異常次元を計算するための熱力学的Bethe仮説方程式に替わる、有限個しか未知函数を含まない非線形積分方程式を求めるために役に立つであろう。

(v) Kazakov氏とLeurent氏(ENS)と共同研究を行い、 $\mathfrak{gl}(M|N)$ の指標に作用する「co-derivative」と呼ばれる「微分」を用いて、Baxter Q演算子の全く新しい構成法を提案した。これによって従来のBethe仮説法を用いずに、Bethe仮説方程式を導出することに成功した。ソリトン理論におけるBacklund変換式とBaxter Q演算子の関係についても、(Baxter Q演算子の固有値ではなく)演算子のレベルで明らかになった。この結果はプレプリントサーバーで公表し、現在査読付き雑誌に投稿中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- (1) Nikolay Gromov, Vladimir Kazakov, Sebastien Leurent, Zengo Tsuboi, Wronskian Solution for AdS/CFT Y-system, Journal of High Energy Physics, 01 (2011)155 (総頁32ページ, 査読有)。

(2) Nikolay Gromov, Vladimir Kazakov, Zengo Tsuboi, PSU(2,2|4) Character of Quasiclassical AdS/CFT, Journal of High Energy Physics, 07 (2010) 097 (総頁 40 ページ, 査読有).

(3) Zengo Tsuboi, Solutions of the T-system and Baxter equations for supersymmetric spin chains, Nuclear Physics B826 [PM] (2010) 399-455 (総頁 57 ページ, 査読有).

(4) Vladimir V. Bazhanov, Zengo Tsuboi, Baxter's Q-operators for supersymmetric spin chains, Nuclear Physics B805 [FS] (2008) 451-516 (総頁 66 ページ, 査読有).

[学会発表] (計 17 件)

(1) 坪井禪吾, Wronskian solutions of T, Q and Y-systems for AdS/CFT, 研究会「素粒子・幾何・重力」, 大阪市立大学学術情報センター10F, 2010年9月27日-29日(ポスターセッション).

(2) Zengo Tsuboi, Wronskian solutions of T, Q and Y-systems for AdS/CFT, IPMU (東京大学数物連携宇宙研究機構), Mathematics - String Theory seminar, 2010年9月7日.

(3) Zengo Tsuboi, Wronskian solutions for AdS/CFT T-and Y-systems, Max Planck Institute for Gravitational Physics (Albert Einstein Institute), Potsdam, Germany (セミナー), 2010年8月9日.

(4) Zengo Tsuboi, Wronskian solutions of the T-system for the T-hook boundary condition, Integrability in Gauge and String Theory 2010, Nordita, Sweden, 2010年6月28日-7月2日(ポスターセッション).

(5) 坪井禪吾, $U_q(\mathfrak{gl}(M|N))$ 型の T-system のバククルンド変換とロンスキアン型の解, 日本物理学会, 2009年秋季大会, 熊本大学黒髪キャンパス, 講演番号: 28aPS-83, 2009年9月28日.

(6) 坪井禪吾, Baxter's Q-operators and functional relations in supersymmetric spin chains, 大阪市立大学数理物理研究室セミナー, 2009年9月8日.

(7) 坪井禪吾, Baxter's Q-operators and functional relations in solvable lattice models, 広大多数物理セミナー, 広島大学

総合科学部 数理情報科学教室, 2009年9月4日.

(8) Zengo Tsuboi, Solutions of the T-system and Baxter equations for supersymmetric spin chains, Infinite Analysis 09, New Trends in Quantum Integrable Systems, 2009年7月29日, Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University, (ポスターセッション).

(9) 坪井禪吾, 量子アフィンスーパー代数に付随する可解格子模型に対する Baxter Q 演算子と函数関係式, 日本物理学会, 2008年秋季大会, 岩手大学上田キャンパス, 講演番号: 23aPS-79, 2008年9月23日.

(10) Zengo Tsuboi, Baxter's Q-operators for the quantum affine superalgebra $U_q(\mathfrak{sl}(m|n))$, Aspects of Quantum Integrability, 京都大学基礎物理学研究所, 2008年7月24日(10分間講演とポスターセッション).

(11) Zengo Tsuboi, Baxter's Q-operators for supersymmetric integrable spin chains, APCTP Focus Program Finite-size Technology in Low Dimensional Quantum System (IV), 2008年6月30日, APCTP (浦項, 韓国).

(12) 坪井禪吾, 一般 Q-system, 岡山大学理学部数学科 (セミナー), 2008年4月11日.

(13) 坪井禪吾, Vladimir Bazhanov, q-oscillator superalgebra の表現論と Baxter Q 演算子, 日本物理学会, 第63回年次大会, 近畿大学本部キャンパス, 講演番号: 25pPSA-59, 2008年3月25日.

(14) 坪井禪吾, Vladimir Bazhanov, Baxter Q-operators for quantum affine superalgebras, 日本数学会, 2008年度年会, 無限可積分系セッション, 2008年3月23日, 近畿大学理工.

(15) Zengo Tsuboi, Baxter's Q-operators for supersymmetric spin chains, The Annual Workshop on Mathematical Physics, 2007 Annual Statistical Mechanics Meeting, 2007年12月10日, The Australian National University, Canberra, Australia.

(16) Zengo Tsuboi, Baxter Q-operators for $U_{\{q\}}(\mathfrak{sl}(2|1))$, La 79eme Rencontre entre physiciens theoriciens et mathematiciens

"Supersymmetry and Integrability", 2007
年 6 月 2 日, Institut de Recherche
Mathematique Avancee (IRMA), Strasbourg.

(17) Zengo Tsuboi, Baxter Q-operators for
quantum affine superalgebras, Physics and
Mathematics of interacting quantum
systems in low dimensions, 東京大学柏キ
ャンパス, 2007 年 5 月 25 日-26 日 (ポスター
セッション).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

坪井 禪吾 (TSUBOI ZENGO)

研究者番号 : 90416420

(2) 研究分担者

なし ()

研究者番号 :

(3) 連携研究者

なし ()

研究者番号 :